

PROBLEME REZOLVATE DE ASTRONOMIE

1.(Juniori+Seniori)_ Limita Roche. *Să se precizeze factorul numeric din expresia limitei (razei) Roche, în cazul satelitului sferic rigid al unei planete, din momentul în care el a ajuns la limita Roche față de planetă. Să se precizeze valoarea aceluiași factor numeric în cazul unui satelit sferic lichid, ajuns la limita Roche față de planetă. În imaginile din figura 7.104 sunt prezentate secvențe din evoluția satelitului sferic lichid, pe măsura apropierii sale de limita Roche. Să se indice aceste secvențe în ordinea naturală a desfășurării lor.*

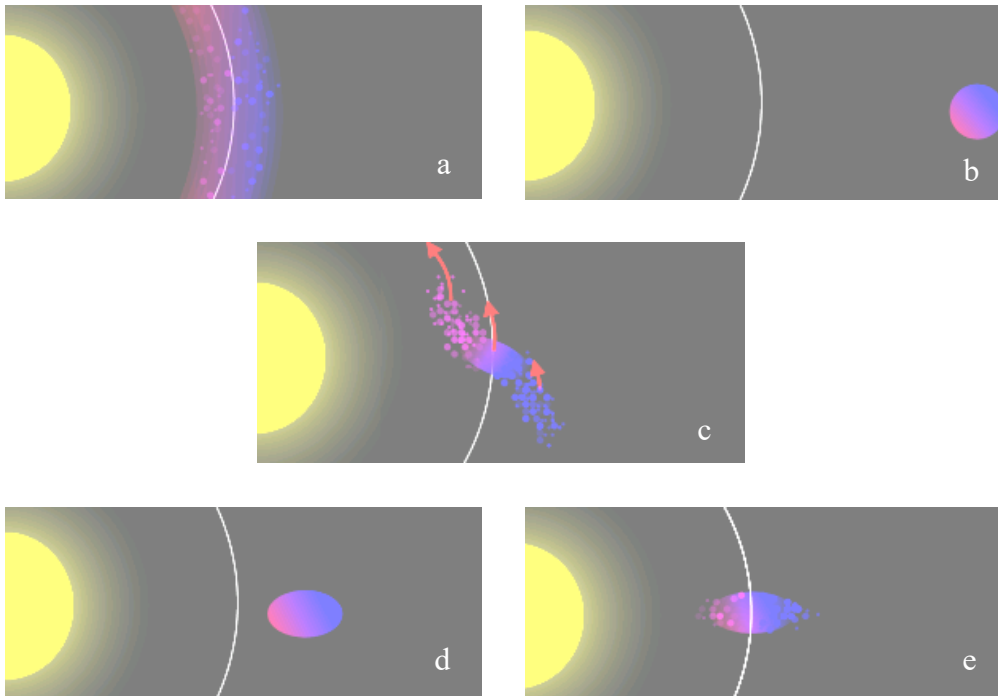


Fig. 7.104

Rezolvare

7.76. Limita Roche este distanța minimă până la care se poate apropia de o planetă, un satelit mare, fără a se rupe datorită forțelor mareice. Dacă satelitul și planeta au structuri similare (densități identice), atunci limita Roche a satelitului este aproximativ $2,5 \cdot R_{\text{planeta}}$.

Inelele lui Saturn se află în interiorul limitei Roche a lui Saturn și pot fi sfărâmaturi ale Lunii demolate.

Limita Roche este distanța față de o stea (planetă) primară, în interiorul căreia, intrând un corp ceresc, ținut întreg în afara acesteia numai datorită propriei gravitații, se va dezintegra datorită forțelor mareice exercitate asupra sa de steaua (planeta) primară, care depășesc forțele propriei gravitații. În interiorul limitei Roche, un corp orbital va avea tendința să se dezintegreze, iar în afara limitei Roche corpul va avea tendința să se concentreze. În interiorul limitei Roche, datorită dezintegrării corpului se formează un inel. Fragmentele care au rezultat din dezintegrare au viteze diferite, fiind din ce în ce mai mari, pentru distanțe până la steaua (planeta) primară din ce în ce mai mici.

Limita Roche pentru un satelit sferic rigid, față de o stea primară, este distanța d față de steaua primară, la care forța de atracție gravitațională exercitată de satelit asupra unui corp din apropierea sa este egală cu forța mareică exercitată de steaua primară asupra corpului din apropierea satelitului.

Un satelit cu masa M_{satelit} și raza R_{satelit} este în cădere liberă spre o planetă, având masa M_{planeta} și raza R_{planeta} . Distanța dintre satelit și planetă este $d_{\text{satelit-planeta}}$. Asupra unui corp mic, cu masa m , aflat pe suprafața satelitului, pe partea apropiată planetei, așa cum indică desenul din figura alăturată, acționează: forța de atracție gravitațională din partea satelitului și forța de atracție gravitațională din partea planetei.

Forța de atracție gravitațională pe care satelitul o exercită asupra corpului de pe suprafața sa este:

$$F_{\text{gr,s-c}} = K \frac{mM_{\text{satelit}}}{R_{\text{satelit}}^2};$$

Forța mareică, orientată spre planetă, acționând asupra corpului de pe suprafața satelitului, este

$$F_{\text{mareica}} = 2K \frac{mM_{\text{planeta}}}{d_{\text{satelit-planeta}}^3}.$$

Pentru a obține această aproximație, calculăm diferența atracțiilor gravitaționale exercitate de planetă asupra corpului cu masa m , situat pe marginea satelitului dinspre planetă și în centrul satelitului:

$$F_{\text{mareica}} = K \frac{mM_{\text{planeta}}}{(d_{\text{s-p}} - R_{\text{satelit}})^2} - K \frac{mM_{\text{planeta}}}{d_{\text{s-p}}^2};$$

$$F_{\text{mareica}} = KmM_{\text{planeta}} \frac{d_{\text{s-p}}^2 - (d_{\text{s-p}} - R_s)^2}{d_{\text{s-p}}^2 (d_{\text{s-p}} - R_s)^2};$$

$$F_{\text{mareica}} = KmM_{\text{planeta}} \frac{2d_{\text{s-p}}R_s - R_s^2}{d_{\text{s-p}}^4 - 2d_{\text{s-p}}^3R_s + R_s^2d_{\text{s-p}}^2};$$

$$R_{\text{satelit}} \ll d_{\text{satelit-planeta}};$$

$$F_{\text{mareica}} = KmM_{\text{planeta}} \frac{2d_{\text{s-p}}R_s}{d_{\text{s-p}}^4}; F_{\text{mareica}} = 2K \frac{mM_{\text{planeta}}R_s}{d_{\text{s-p}}^3}.$$

Limita Roche este atinsă atunci când:

$$F_{\text{gr,s-c}} = F_{\text{mareica}};$$

$$K \frac{mM_{\text{satelit}}}{R_{\text{satelit}}^2} = 2K \frac{mM_{\text{planeta}}R_s}{d_{\text{s-p}}^3}; \quad \frac{M_{\text{satelit}}}{R_{\text{satelit}}^2} = 2 \frac{M_{\text{planeta}}R_s}{d_{\text{s-p}}^3};$$

$$d_{\text{s-p}} = R_s \left(2 \cdot \frac{M_{\text{planeta}}}{M_{\text{satelit}}} \right)^{1/3}; \quad d_{\text{s-p}} = \sqrt[3]{2} \cdot R_s \left(\frac{M_{\text{planeta}}}{M_{\text{satelit}}} \right)^{1/3};$$

$$d_{\text{s-p}} = 1,25 \cdot R_s \left(\frac{M_{\text{planeta}}}{M_{\text{satelit}}} \right)^{1/3};$$

$$M_{\text{planeta}} = \rho_{\text{planeta}} \frac{4\pi R_{\text{planeta}}^3}{3}; M_{\text{satelit}} = \rho_{\text{satelit}} \frac{4\pi R_s^3}{3};$$

$$d_{s-p} = R_{\text{planeta}} \left(2 \cdot \frac{\rho_{\text{planeta}}}{\rho_{\text{satelit}}} \right)^{1/3}; d_{s-p} = \sqrt[3]{2} \cdot R_{\text{planeta}} \left(\frac{\rho_{\text{planeta}}}{\rho_{\text{satelit}}} \right)^{1/3};$$

$$d_{s-p} = 1,25 \cdot R_{\text{planeta}} \left(\frac{\rho_{\text{planeta}}}{\rho_{\text{satelit}}} \right)^{1/3}.$$

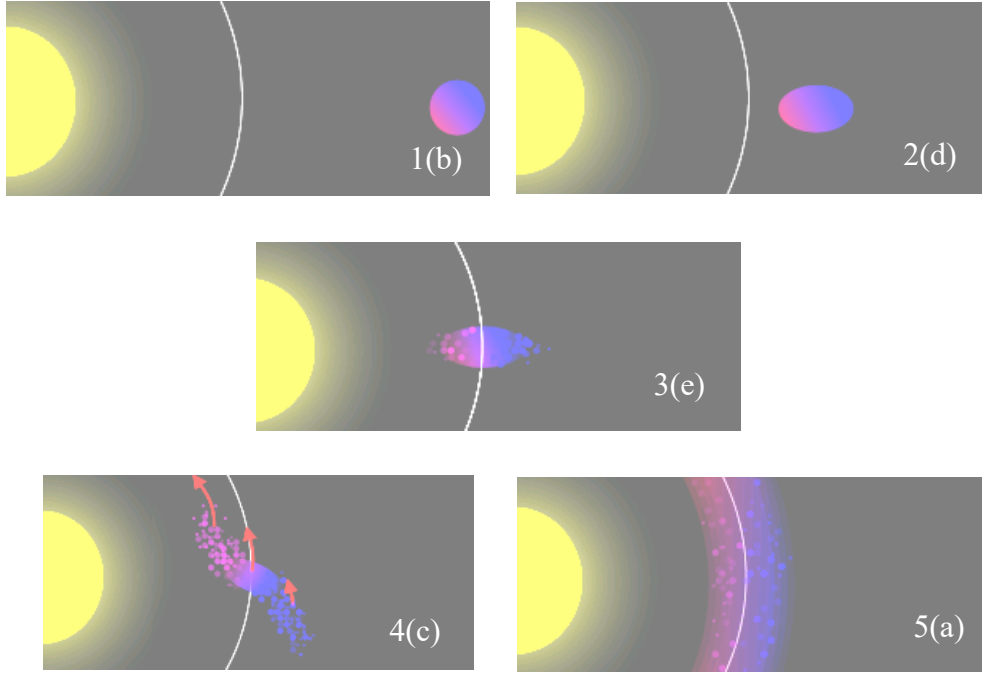


Fig. 7.105

Pentru un satelit sferic lichid, se demonstrează că limita Roche este dată de expresia:

$$d_{s-p} = 2,44 \cdot R_{\text{planeta}} \left(\frac{\rho_{\text{planeta}}}{\rho_{\text{satelit}}} \right)^{1/3}.$$

Evoluția satelitului sferic lichid, pe măsura apropierii sale de limita Roche, presupune succesiunea secvențelor așa cum sunt ele prezentate în imaginile din figura 7.105:

- 1 (b) – departe de limita Roche forma satelitului lichid rămâne sferică;
- 2 (d) – în apropierea limitei Roche, forțele mareice deformează satelitul;
- 3 (e) – în interiorul limitei Roche, gravitația proprie este depășită de forțele mareice și satelitul începe să se dezintegreze;
- 4 (c) – particulele din apropierea planetei au viteze mai mari decât particulele aflate mai departe;
- 5 (a) – particulele rezultate din dezintegrarea satelitului formează inele în jurul planetei.

2.(Juniori+Seniori)_ Raza asteroidului. Un asteroid considerat sferic, se află la distanța $d = 2,8$ UA față de Soare. La opoziție, luminozitatea sa vizuală este $L_v = 1,46 \cdot 10^{-16} \text{ W/m}^2$. Să se determine raza asteroidului. Albedoul asteroidului este $\alpha = 1$.

Rezolvare

În acord cu legea lui Stefan – Boltzmann, radianța Soarelui, considerat corp negru, este:

$$Q_{\text{Soare}} = \frac{E_{\text{emis,Soare}}}{tS_{\text{Soare}}} = \sigma T_S^4,$$

astfel încât:

$$\frac{E_{\text{emis,Soare}}}{t} = P_{\text{emis,Soare}}; \sigma T_S^4 = \frac{P_{\text{emis,Soare}}}{4\pi R_S^2};$$

$$P_{\text{emis,Soare}} = \sigma T_S^4 4\pi R_S^2.$$

Densitatea fluxului energetic al Soarelui, la distanța r_{AS} față de acesta, acolo unde se află asteroidul A, este:

$$\phi_{\text{Soare},r_{AS}} = \frac{E_{\text{emis,Soare}}}{St} = \frac{\frac{E_{\text{emis,Soare}}}{t}}{S} = \frac{P_{\text{emis,Soare}}}{S} = \frac{P_{\text{emis,Soare}}}{4\pi r_{AS}^2};$$

$$\phi_{\text{Soare},r_{AS}} = \frac{\sigma T_S^4 4\pi R_S^2}{4\pi r_{AS}^2}.$$

Semisfera asteroidului, expusă radiațiilor solare, este echivalentă cu un disc plan circular, având raza R_A și aria suprafeței πR_A^2 , așezat perpendicular pe direcția Asteroid – Soare, astfel încât fluxul radiațiilor solare incidente, la nivelul asteroidului, este:

$$F_{\text{incident}} = \phi_{\text{Soare},r_{AS}} \cdot \pi R_A^2 = P_{\text{incident}} = P_{\text{emis,Soare}};$$

$$F_{\text{incident}} = \frac{\sigma T_S^4 4\pi R_S^2}{4\pi r_{AS}^2} \cdot \pi R_A^2 = P_{\text{incident}};$$

$$\alpha = \frac{P_{\text{reflectatAsteroid}}}{P_{\text{incident}}};$$

$$P_{\text{reflectatAsteroid}} = \alpha P_{\text{incident}} = \alpha \frac{\sigma T_S^4 4\pi R_S^2}{4\pi r_{AS}^2} \cdot \pi R_A^2;$$

$$\alpha = 1;$$

$$P_{\text{reflectatAsteroid}} = P_{\text{incident}} = \frac{\sigma T_S^4 4\pi R_S^2}{4\pi r_{AS}^2} \cdot \pi R_A^2.$$

La rândul său, energia emisă de Asteroid în unitatea de timp, prin toată suprafața sa este:

$$P_{\text{emis,Asteroid}} = \sigma T_A^4 \cdot 4\pi R_A^2.$$

Atunci când procesul devine staționar:

$$P_{\text{emis,Asteroid}} = P_{\text{reflectatAsteroid}};$$

astfel încât rezultă:

$$\sigma T_A^4 \cdot 4\pi R_A^2 = \frac{\sigma T_S^4 4\pi R_S^2}{4\pi r_{AS}^2} \cdot \pi R_A^2;$$

$$T_A^4 = \frac{T_S^4 R_S^2}{4r_{AS}^2}.$$

În aceste condiții, luminozitatea vizuală a asteroidului, pentru observatorul de pe Pământ, este:

$$L_v = \frac{\sigma T_A^4 \cdot 4\pi R_A^2}{4\pi r_{PA}^2} = \sigma T_S^4 \frac{R_A^2 R_S^2}{4r_{PA}^2 r_{SA}^2},$$

din care rezultă că raza asteroidului este:

$$R_A = \frac{2r_{PA} r_{SA}}{R_S T_S^2} \sqrt{\frac{L_v}{\sigma}}.$$

3.(Seniori)_ Temperatura Coronei Solare. În spectrul Coroanei Solare abundă linia spectrală a Calciului, CaXIII. Știind că energia de ionizare pentru Ca este $E_{i,Ca} = 655 \text{ eV}$, *să se determine* temperatura Coronei Solare. Se cunoaște constanta lui Boltzmann, $k = 1,33 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$.

Rezolvare

Energia de ionizare a unui atom este energia necesară extragerii unui electron. Energia fotonului care determină ionizarea se regăsește sub formă de energie cinetică a ionului de Ca, astfel încât:

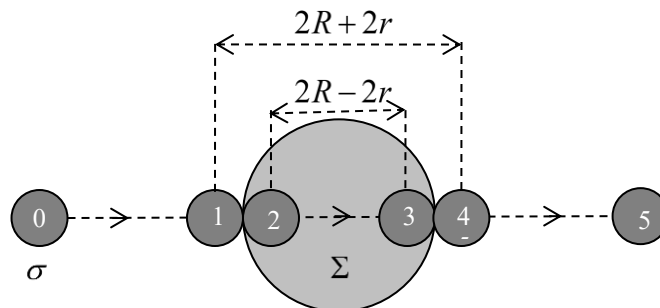
$$E_{i,Ca} = h\nu = \frac{mv^2}{2} = \frac{3}{2}kT;$$

$$T = \frac{2E_{i,Ca}}{3k} \approx 525 \cdot 10^4 \text{ K}.$$

4.(Juniori+Seniori)_ Sistem binar cu eclipsă. Pentru un sistem stelar binar cu eclipse centrale se cunosc: $t_{14} = 1,5 \text{ h}$, intervalul de timp dintre contactele 1 și 4; $t_{23} = 1 \text{ h}$, intervalul de timp dintre contactele 2 și 3. *Să se determine* raportul razelor celor două stele, R/r .

Rezolvare

În desenul din figura 7.108 este prezentată proiecția pe sfera cerească a celor două stele din sistemul binar cu eclipse centrale, atunci când steaua σ ocultează steaua Σ . În acord cu notațiile din desen, rezultă:



$$d_{14} = v \cdot t_{14} = 2R + 2r; \quad d_{23} = v \cdot t_{23} = 2R - 2r;$$

$$\frac{2R+2r}{2R-2r}=\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{t}_{14}}{\mathbf{v}\cdot\mathbf{t}_{23}}=\frac{t_{14}}{t_{23}};$$

$$\frac{R}{r}=\frac{t_{14}+t_{23}}{t_{14}-t_{23}}=5.$$

5. (Juniori+Seniori)_ Cappela. Paralaxa steii Cappela din constelația Auriga este $p = 77,3 \cdot 10^{-3}''$. Să se determine distanța dintre Cappela și Pământ.

Rezolvare

În acord cu notațiile din figura 7.109, știind definiția paralaxei, rezultă:

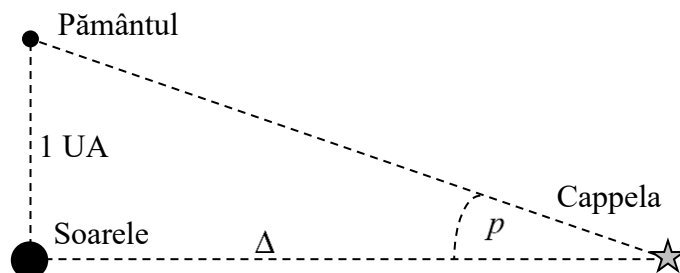


Fig. 7.109

$$\tan p = \frac{1 \text{ UA}}{\Delta(\text{UA})} \approx p(\text{rad});$$

$$\Delta(\text{UA}) = \frac{1}{p(\text{rad})} \text{ UA};$$

$$p = 77,3 \cdot 10^{-3}'' = 77,3 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{3,14}{180 \cdot 60 \cdot 60} \text{ rad} \approx 37 \cdot 10^{-8} \text{ rad};$$

$$\Delta(\text{UA}) = \frac{1}{p(\text{rad})} \text{ UA};$$

$$\Delta(\text{UA}) = \frac{1}{37 \cdot 10^{-8}} \text{ UA} = \frac{10^8}{37} \text{ UA};$$

$$1 \text{ UA} = \frac{1}{63240} \text{ ani lumina};$$

$$\Delta(\text{al}) = \frac{10^8}{37} \cdot \frac{1}{63240} \text{ ani lumina} \approx 42,73 \text{ ani lumină}.$$

6. (Juniori+Seniori)_ Diametrul telescopului. Să se determine diametrul unui telescop, astfel încât, cu ajutorul său, să putem observa o planetă care evoluează în jurul unei stele la distanța $r = 1 \text{ UA}$, dacă steaua se află la distanța $d = 266,26 \text{ ani lumină}$ față de Pământ.

Rezolvare

Pentru ca imaginile celor două corpuri cerești să fie distincte, așa cum indică desenul din figura 7.114, la limită, trebuie îndeplinită condiția Rayleigh:

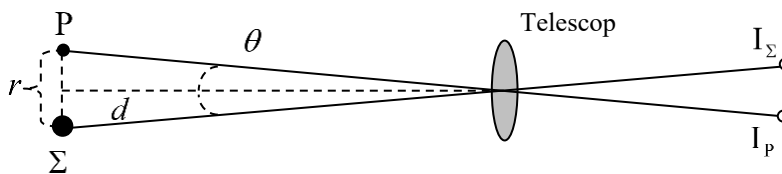


Fig. 7.114

$$\theta = 1,22 \frac{\lambda}{D_{\min}},$$

unde λ este lungimea de undă a radiațiilor emise, iar $D_{\min}$ este diametrul minim pe care ar trebui să-l aibă deschiderea circulară a telescopului, astfel încât să fie posibilă rezolvarea celor două corpuri cerești;

$$D_{\min} = \frac{1,22 \cdot \lambda}{\theta}; \quad \theta = \frac{r}{d}; \quad D_{\min} = 1,22 \frac{\lambda d}{r};$$

$$D_{\min} = 1,22 \cdot \frac{500 \cdot 10^{-9} \text{ m} \cdot 266,26 \cdot 9,5 \cdot 10^{12} \text{ km}}{15 \cdot 10^7 \text{ km}} \approx 10,28 \text{ m}.$$

7.(Juniori+Seniori)_ Numărul lui Wolf. Pentru petele solare care apar într-un anumit interval de timp se cunosc: numărul total de pete individuale, $f = 14$; numărul total al grupurilor de pete, $g = 13$; factorul de observare, $k = 0,95$. Să se determine numărul lui Wolf.

Rezolvare

Numărul petelor solare care apar într-un anumit interval de timp este o măsură a activității solare. Acest număr se calculează folosindu-se un indicator denumit *numărul lui Wolf*, definit prin relația:

$$R = k(10 \cdot g + f); \quad R = 0,95(10 \cdot 13 + 14) = 136,8.$$

8.(Juniori+Seniori)_ Extinderea nebuloasei. Distanța de la nebuloasa reprezentată în imaginile din figura 7.125, până la Pământ este $\Delta = 6,100 \text{ pc}$. Cunoscând câmpul de vedere al camerei cu care au fost realizate imaginile, $\text{FOV} = (202'' \times 202'') = [(\alpha_{\max} = 202'') \times (\alpha_{\max} = 202'')]$, să se determine raportul v/c , unde v este viteza cu care nebuloasa se extinde.



Fig. 7.125

Rezolvare

Câmpul de vedere (FOV) al unui instrument optic înseamnă extensia unghiulară maximă a imaginii formată de acel instrument optic. Câmpul de vedere al unei camere poate fi măsurat în plan orizontal, în plan vertical, sau în plan diagonal, așa cum se evidențiază în desenul din figura alăturată.

Pentru o lentilă convergentă, care proiectează în planul său focal o imagine liniară, așa cum indică desenul din figura 7.126, câmpul de vedere (unghiul de vedere) este unghiul α , dat de expresia:

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{d/2}{f} = \frac{d}{2f},$$

unde: d – înălțimea imaginii; f – distanța focală a lentilei obiectivului camerei;

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{D/2}{\Delta} = \frac{D}{2\Delta},$$

unde: D – înălțimea obiectului; Δ – distanța de la obiect la lentilă.

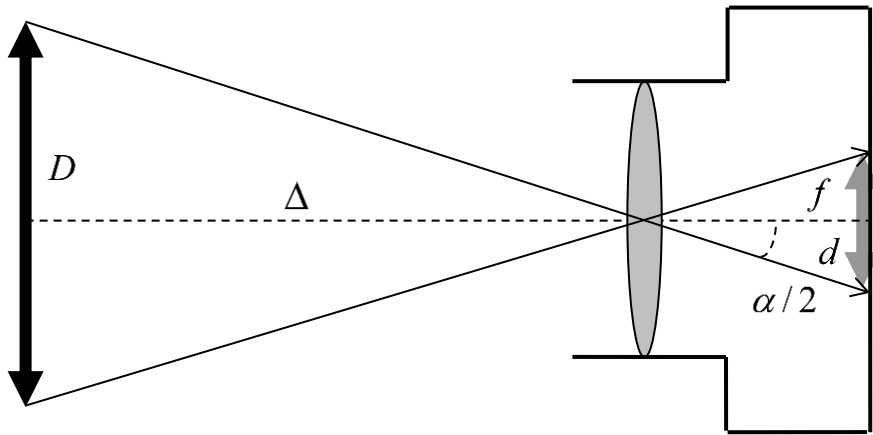


Fig. 7.126

Măsurînd cu o riglă lungimile notate pe imaginile din figura 7.127, rezultă:

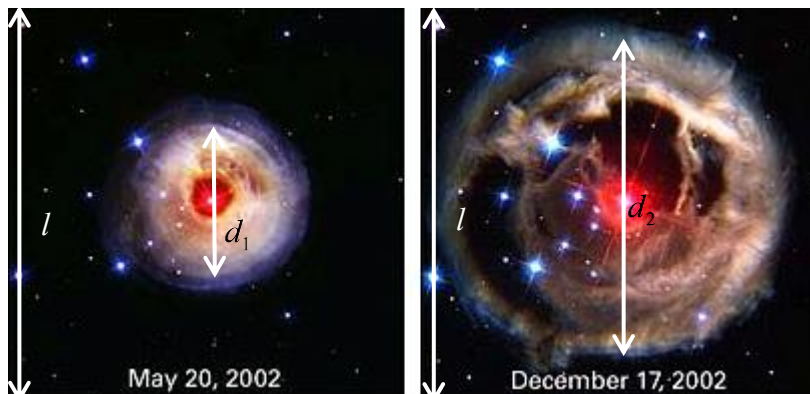


Fig. 7.127

$$\tan \frac{\alpha_1}{2} = \frac{d_1}{2f}; \quad \tan \frac{\alpha_1}{2} = \frac{D_1}{2\Delta}; \quad \frac{D_1}{2\Delta} = \frac{d_1}{2f};$$

$$D_1 = 2\Delta \frac{d_1}{2f},$$

reprezentând diametrul nebuloasei la momentul t_1 ;

$$\tan \frac{\alpha_2}{2} = \frac{d_2}{2f}; \quad \tan \frac{\alpha_2}{2} = \frac{D_2}{2\Delta}; \quad \frac{D_2}{2\Delta} = \frac{d_2}{2f};$$

$$D_2 = 2\Delta \frac{d_2}{2f},$$

reprezentând diametrul nebuloasei la momentul t_2 ;

$$\tan \frac{\alpha_{\max}}{2} = \frac{l/2}{f} = \frac{l}{2f}; \quad 2f = \frac{l}{\tan \frac{\alpha_{\max}}{2}};$$

$$D_2 - D_1 = \frac{2\Delta}{2f}(d_2 - d_1) = \frac{2\Delta}{\frac{l}{\tan \frac{\alpha_{\max}}{2}}}(d_2 - d_1) = 2\Delta \frac{d_2 - d_1}{l} \tan \frac{\alpha_{\max}}{2};$$

$$t_1 = 21 \text{ mai } 2002; \quad t_2 = 17 \text{ decembrie } 2002;$$

$$t_2 - t_1 = 211 \text{ zile}; \quad l = 15 \text{ mm}; \quad d_1 = 20 \text{ mm}; \quad d_2 = 40 \text{ mm};$$

$$v = \frac{D_2 - D_1}{t_2 - t_1} = \frac{2\Delta}{t_2 - t_1} \frac{d_2 - d_1}{l} \tan \frac{\alpha_{\max}}{2};$$

$$\frac{v}{c} = v = \frac{2\Delta}{t_2 - t_1} \frac{d_2 - d_1}{cl} \tan \frac{\alpha_{\max}}{2}.$$

9.(Seniori)_ Excesul de culoare. Pentru o stea se cunosc: distanța față de Pământ, $\Delta = 100 \text{ pc}$; magnitudinea aparentă vizuală, $m_{v,\text{observat}} = 13,0^{\text{m}}$; magnitudinea aparentă fotografică, $m_f = 14,6^{\text{m}}$; magnitudinea absolută vizuală, $M_{v,\text{observat}} = 4,7^{\text{m}}$. *Să se determine* excesul de culoare al stelei.

Se va considera că:

$$A_v = 3 \cdot E_{B-V},$$

unde: E_{B-V} – excesul de culoare; A_v – absorbția vizuală.

Rezolvare

În condițiile inexistenței extincției interstelare, se cunoște relația dintre magnitudinile intrinseci (reale) absolută și aparentă ale unei stele:

$$M_{\text{intrinsec}} = m_{\text{intrinsec}} + 5^{\text{m}} - 5^{\text{m}} \log|\Delta|,$$

unde $|\Delta|$ însemnează valoarea numerică a distanței Δ exprimată în parseci, astfel încât:

$$\log|\Delta| = \frac{m_{\text{intrinsec}} + 5^m - M_{\text{intrinsec}}}{5^m}.$$

Pentru o aceeași stea, existența extincției interstelare este echivalentă cu a localiza steaua la o altă distanță, $\Delta_{\text{echivalent}} > \Delta$, fără extincție interstelară, astfel încât:

$$\log|\Delta_{\text{echivalent}}| = \frac{(m_{\text{intrinsec}} + \Delta m) + 5^m - M_{\text{intrinsec}}}{5^m},$$

unde Δm este corecția în magnitudine aparentă, necesară realizării echivalenței propuse;

$$\log|\Delta_{\text{echivalent}}| = \frac{m_{\text{intrinsec}} + 5^m - M_{\text{intrinsec}} + \Delta m}{5^m};$$

$$\log|\Delta_{\text{echivalent}}| = \frac{m_{\text{intrinsec}} + 5^m - M_{\text{intrinsec}}}{5^m} + \frac{\Delta m}{5^m};$$

$$\log|\Delta_{\text{echivalent}}| = \log|\Delta| + \frac{\Delta m}{5^m}.$$

În condițiile existenței extincției interstelare, rezultă:

$$\log|\Delta| = \frac{m_{\text{v,observat}} + 5^m - M_{\text{v,observat}} + A_v}{5^m},$$

unde A_v – absorbția vizuală;

$$\frac{m_{\text{intrinsec}} + 5^m - M_{\text{intrinsec}}}{5^m} = \frac{m_{\text{v,observat}} + 5^m - M_{\text{v,observat}} + A_v}{5^m};$$

$$m_{\text{intrinsec}} + 5^m - M_{\text{intrinsec}} = m_{\text{v,observat}} + 5^m - M_{\text{v,observat}} + A_v;$$

$$A_v = (m_{\text{intrinsec}} - M_{\text{intrinsec}} + 5^m) - (m_{\text{v,observat}} - M_{\text{v,observat}} + 5^m);$$

$$m_{\text{intrinsec}} - M_{\text{intrinsec}} + 5^m = 5^m \cdot \log|\Delta|;$$

$$A_v = 5^m \cdot \log|\Delta| - (m_{\text{v,observat}} - M_{\text{v,observat}} + 5^m);$$

$$A_v = 3 \cdot E_{\text{B-V}}; E_{\text{B-V}} = \frac{1}{3} \cdot A_v;$$

$$E_{\text{B-V}} = \frac{1}{3} [5^m \cdot \log|\Delta| - (m_{\text{v,observat}} - M_{\text{v,observat}} + 5^m)]$$

10. (Seniori)_ Stea de tip A0V. Indicele de culoare BV măsurat (observat) al unei stele de tip A0V este $m_{\text{BV,observat}} = 0,70^m$. Să se precizeze de câte ori ar fi mai strălucitoare steaua, dacă n-ar exista extincție interstelară. Se știe că, între absorbția vizuală, A_v și excesul de culoare, E_{BV} , există relația: $A_v = 3 \cdot E_{\text{BV}}$.

Rezolvare

Indicele de culoare al unei stele este diferența dintre magnitudinile aparente ale unei stele, raportate la două benzi de lungimi de undă. De exemplu:

$$m_{\text{BV}} = m_{\text{B}} - m_{\text{V}}; m_{\text{UB}} = m_{\text{U}} - m_{\text{B}}.$$

Excesul de culoare este diferența dintre indicele de culoare observat (afectat de extincția interstelară) și indicele de culoare intrinsec (real; ne afectat de extincția interstelară):

$$\begin{aligned} E_{BV} &= m_{BV,observat} - m_{BV,intrinsc}; \\ E_{BV} &= (m_{B,observat} - m_{V,observat}) - (m_{B,intrinsc} - m_{V,intrinsc}); \\ E_{UB} &= m_{UB,observat} - m_{UB,intrinsc}; \\ E_{UB} &= (m_{U,observat} - m_{B,observat}) - (m_{U,intrinsc} - m_{B,intrinsc}). \end{aligned}$$

Distanța până la stea este afectată de extincția interstelară, în sensul că observatorul va crede că steaua se află mult mai departe decât în realitate, $\Delta > \Delta_0$, datorită densității coloanei mediului absorbant interstelar.

Ca urmare, relația dintre magnitudinile stelei, aparentă și absolută, cunoscută în condițiile inexistenței extincției interstelare:

$$m_{intrinsc} - M_{intrinsc} = 5^m \cdot \log|\Delta_0| - 5^m,$$

în condițiile existenței extincției interstelare, devine:

$$m_{v,observat} - M_{v,observat} = 5^m \cdot \log|\Delta| - 5^m + A_v,$$

unde A_v reprezintă absorbția vizuală.

Rezultă:

$$\begin{aligned} \log|\Delta_0| &= \frac{m_{intrinsc} - M_{intrinsc} + 5^m}{5^m}; \\ \log|\Delta| &= \frac{m_{v,observat} + 5^m - M_{v,observat} + A_v}{5^m}; \\ \log|\Delta| &= \frac{m_{v,observat} + 5^m - M_{v,observat}}{5^m} + \frac{A_v}{5^m}. \end{aligned}$$

În condițiile inexistenței extincției interstelare, se cunoște relația dintre magnitudinea aparentă intrinsecă (reală) și magnitudinea absolută intrinsecă ale unei stele:

$$M_{intrinsc} = m_{intrinsc} + 5^m - 5^m \log|\Delta_0|,$$

unde $|\Delta_0|$ însemnează valoarea numerică a distanței Δ_0 exprimată în parseci, astfel încât:

$$\log|\Delta_0| = \frac{m_{intrinsc} + 5^m - M_{intrinsc}}{5^m}.$$

Pentru o aceeași stea, existența extincției interstelare este echivalentă cu a localiza steaua la o altă distanță, $\Delta_{echivalent} > \Delta_0$, fără extincție interstelară, astfel încât:

$$\log|\Delta_{echivalent}| = \frac{(m_{intrinsc} + \Delta m) + 5^m - M_{intrinsc}}{5^m},$$

unde Δm este corecția în magnitudine aparentă, necesară realizării echivalenței propuse;

$$\begin{aligned} \log|\Delta_{echivalent}| &= \frac{m_{intrinsc} + 5^m - M_{intrinsc} + \Delta m}{5^m}; \\ \log|\Delta_{echivalent}| &= \frac{m_{intrinsc} + 5^m - M_{intrinsc}}{5^m} + \frac{\Delta m}{5^m}; \end{aligned}$$

$$\log|\Delta_{\text{echivalent}}| = \log|\Delta_0| + \frac{\Delta m}{5^m}.$$

În condițiile existenței extincției interstelare, rezultă:

$$\log|\Delta| = \frac{m_{v,\text{observat}} + 5^m - M_{v,\text{observat}} + A_v}{5^m},$$

unde A_v – absorbția vizuală;

$$\log|\Delta_{\text{echivalent}}| = \log|\Delta| = \log|\Delta_0| + \frac{\Delta m}{5^m};$$

$$\log|\Delta| - \log|\Delta_0| = \frac{\Delta m}{5^m};$$

$$\log \frac{\Delta}{\Delta_0} = \frac{\Delta m}{5^m};$$

$$\log \frac{E_{\text{intrinsec}}}{E_{\text{observat}}} = \log \frac{\frac{L}{4\pi\Delta_0^2}}{\frac{L}{4\pi\Delta^2}} = \log \left(\frac{\Delta}{\Delta_0} \right)^2 = 2 \cdot \log \frac{\Delta}{\Delta_0};$$

$$\log \frac{E_{\text{intrinsec}}}{E_{\text{observat}}} = 2 \cdot \log \frac{\Delta}{\Delta_0}; \log \frac{\Delta}{\Delta_0} = \frac{1}{2} \cdot \log \frac{E_{\text{intrinsec}}}{E_{\text{observat}}};$$

$$\frac{1}{2} \cdot \log \frac{E_{\text{intrinsec}}}{E_{\text{observat}}} = \frac{\Delta m}{5^m};$$

$$\log \frac{E_{\text{intrinsec}}}{E_{\text{observat}}} = 0,4 \cdot \Delta m;$$

$$\frac{E_{\text{intrinsec}}}{E_{\text{observat}}} = 10^{0,4 \cdot \Delta m}.$$

11. (Juniori+Seniori)_ Pitica albă. Pentru o stea pitică albă se cunosc: magnitudinea absolută vizuală, $M_v = 10^m$; temperatura efectivă a suprafeței sale, $T = 10000 \text{ K}$; corecția bolometrică, $\Delta M = 0,6^m$. Să se determine raza stelei, în funcție de raza Soarelui.

Rezolvare

Utilizând definiția corecției bolometrice, precum și formula lui Pogson, rezultă:

$$\Delta M = M_{\text{bol}} - M_v = 0,6^m; M_{\text{bol}} = M_v + \Delta M = 10,6^m.$$

$$\log \frac{L_{\text{bol}}}{L_{\text{Soare}}} = -0,4(M_{\text{bol}} - M_{\text{S}});$$

$$\log \frac{L_{\text{bol}}}{L_{\text{Soare}}} = -0,4(10,6 - 4,8) = -2,32.$$

Utilizând legea lui Stefan – Boltzmann, rezultă:

$$L_{\text{bol}} = 4\pi R^2 \sigma T^4; L_{\text{Soare}} = 4\pi R_{\text{S}}^2 \sigma T_{\text{S}}^4;$$

$$\frac{L_{\text{bol}}}{L_{\text{Soare}}} = \left(\frac{R}{R_s}\right)^2 \cdot \left(\frac{T}{T_s}\right)^4;$$

$$\log \frac{L_{\text{bol}}}{L_s} = 2 \log \frac{R}{R_s} + 4 \log \frac{T}{T_s} = -2,32;$$

$$\log \frac{R}{R_s} + 2 \log \frac{T}{T_s} = -1,16; \log \frac{R}{R_s} + 2 \log \frac{10000 \text{ K}}{5800 \text{ K}} = -1,16;$$

$$\log \frac{R}{R_s} = -1,63;$$

$$\frac{R}{R_s} \approx 0,023; R = 0,023 \cdot R_s.$$

12. (Juniori+Seniori)_ Oscilațiile Soarelui. *Să se determine* amplitudinea unghiulară a mișcării oscilatorii a Soarelui, datorată existenței planetei Jupiter, așa cum este ea măsurată de un observator aflat pe steaua Barnard. *Să se determine* perioada acestor oscilații. Se cunosc: distanța dintre Jupiter și Soare, $d_{\text{JS}} = 5,204 \text{ UA}$; masa lui Jupiter, $M_J = 0,001 \cdot M_s$; distanța dintre steaua Barnard și Soare, $d_{\text{BS}} = 5,88 \text{ al}$.

Rezolvare

Centrul de masă (CM) al Sistemului Solar nu coincide cu centrul Soarelui. Ca urmare, pentru observatorul de pe steaua Barnard, Soarele va gravita în jurul centrului de masă al sistemului Soare – Jupiter, situat, față de Soare, la distanța:

$$x_{\text{CM}} = \frac{M_J}{M_J + M_s} d_{\text{JS}} \approx 0,005 \text{ UA}.$$

Pentru observatorul de pe steaua Barnard, amplitudinea unghiulară a oscilațiilor Soarelui este:

$$\alpha \approx \frac{x_{\text{CM}}}{d_{\text{BS}}} = \frac{0,005 \text{ UA}}{5,88 \text{ al}} = \frac{0,005 \text{ UA}}{5,88 \cdot 63240 \text{ UA}} \approx 0,000000013 \text{ radiani} \approx 0,00277''.$$

Perioada oscilațiilor Soarelui este egală cu perioada mișcării orbitale a lui Jupiter. În acord cu legea a treia a lui Kepler, rezultă:

$$\frac{T_J^2}{a_J^3} = \frac{T_p^2}{a_p^3}; T_J = T_p \sqrt{\left(\frac{a_J}{a_p}\right)^3} \approx 11,87 \text{ ani}.$$

13. (Juniori+Seniori)_ Quasi Stelar Object. Deplasarea spre roșu observată a unui QSO (Quasi-Stelar-Object = quasar) este, $z = 0,20$. *Să se estimeze* distanța D la care se află acesta. Constanta lui Hubble este de $H_0 = 72 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$.

Rezolvare

În acord cu efectul Doppler, se știe că:

$$\lambda = \lambda_0 \sqrt{\frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}}} > \lambda_0,$$

din care rezultă:

$$\lambda^2 \left(1 - \frac{v}{c}\right) = \lambda_0^2 \left(1 + \frac{v}{c}\right);$$

$$\frac{v}{c} = \frac{\lambda^2 - \lambda_0^2}{\lambda^2 + \lambda_0^2};$$

$$z = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0}; \quad \lambda = (z + 1)\lambda_0;$$

$$\frac{v}{c} = \frac{(z + 1)^2 - 1}{(z + 1)^2 + 1} = 0,18; \quad v = 0,18 \cdot c.$$

În acord cu legea lui Hubble, rezultă:

$$v = H_0 D;$$

$$D = \frac{v}{H_0} = \frac{0,18 \cdot c}{H_0} = \frac{0,18 \cdot 3 \cdot 10^5 \frac{\text{km}}{\text{s}}}{72 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}} = 750 \text{ Mpc}.$$

14. (Juniori+Seniori)_ Tranzitul lui Venus. Un observator aflat în apropierea polului Nord al Pământului a urmărit un tranzit al lui Venus. Calea de tranzit a lui Venus, proiectată pe discul Soarelui, este prezentată în figura 4.4. Punctele A, B, C și D, sunt toate pe calea de tranzit și marchează centrul discului lui Venus. În punctele A și B, centrul lui Venus se suprapune cu marginea discului Solar; punctul C reprezintă centrul lui Venus, corespunzător primului contact al lui Venus cu discul Soarelui; punctul D reprezintă centrul lui Venus, corespunzător ultimului contact al lui Venus cu discul Soarelui. Se știe că: $\angle AOB = 90^\circ$; MN este paralel cu AB. Primul contact a avut loc la ora $t_0 = 9^h$ TU. *Să se calculeze ora t la care a avut loc ultimul contact al lui Venus cu discul Soarelui.*

Se cunosc:

$$T_{\text{Venus}} = 224,70 \text{ zile}; \quad T_{\text{Pamant}} = 365,25 \text{ zile}; \quad d_{\text{Venus-Soare}} = 0,723 \text{ UA}; \quad R_{\text{Venus}} = 0,949 \cdot R_p.$$

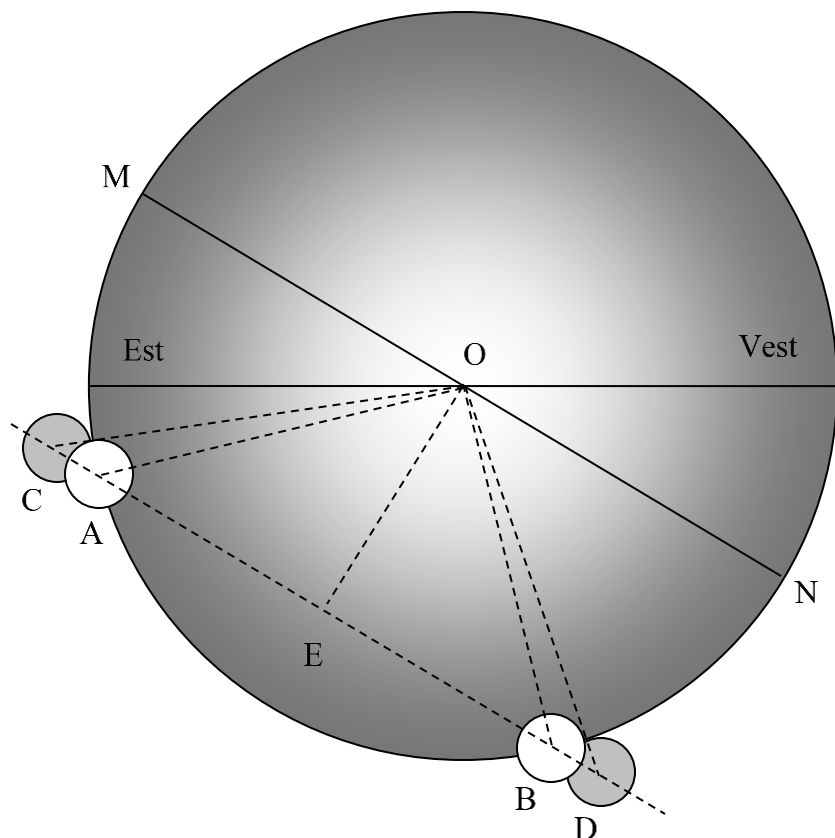


Fig. 4.4

Rezolvare

Deoarece observatorul urmărește tranzitul lui Venus de la Polul Nord al Pământului, efectul rotației Pământului asupra tranzitului lui Venus poate fi neglijat.

Unghiul sub care se vede discul Soarelui, din punctul de observare de pe Pământ, se calculează, utilizând desenul din figura 4.5, cu expresia:

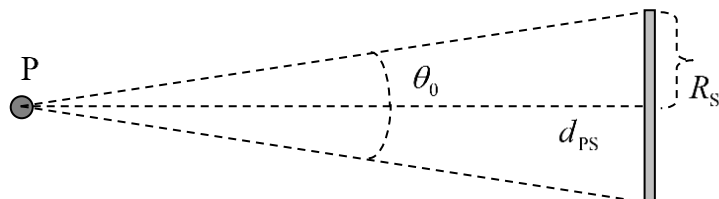


Fig. 4.5

$$\sin \frac{\theta_0}{2} = \frac{R_s}{d_{PS}} \approx \frac{\theta_0}{2};$$

$$\theta_0 = \frac{2R_s}{d_{PS}} = \frac{2 \cdot 6,96 \cdot 10^5 \text{ km}}{149.597.870 \text{ km}} = 0,009304945 \text{ rad} = 0,009304945 \cdot \frac{180 \cdot 60'}{3,14};$$

$$\theta_0 \approx 32',0.$$

astfel încât unghiul sub care se vede de pe Pământ raza Soarelui (segmentul OA) este $\frac{\theta_0}{2} = 16'$.

În mod asemănător se determină unghiul sub care se vede discul lui Venus, din punctul de observare de pe Pământ, utilizând desenul din figura 4.6:

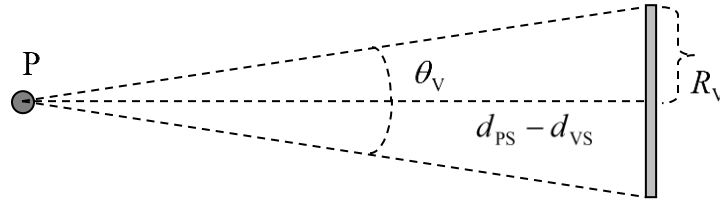


Fig. 4.6

$$\sin \frac{\theta_V}{2} = \frac{R_V}{d_{PS} - d_{VS}} \approx \frac{\theta_V}{2};$$

$$\theta_V = \frac{2R_V}{d_{PS} - d_{VS}} = \frac{2 \cdot 0,949 \cdot 6378 \text{ km}}{(1 - 0,723) \text{ UA}} = \frac{2 \cdot 0,949 \cdot 6378 \text{ km}}{0,277 \text{ UA}};$$

$$\theta_V = \frac{2 \cdot 0,949 \cdot 6378 \text{ km}}{0,277 \cdot 149.597.870 \text{ km}} = 0,00029213 \text{ rad} = 0,00029213 \cdot \frac{180 \cdot 60'}{3,14};$$

$$\theta_V \approx 1',$$

astfel încât unghiul sub care se vede de pe Pământ raza lui Venus este $\frac{\theta_V}{2} = 0,5'$.

Din triunghiul dreptunghic isoscel AOB, de pe discul Soarelui, se calculează:

$$OE = OA \cdot \cos 45^\circ = R_S \frac{\sqrt{2}}{2},$$

astfel încât unghiul sub care se vede acest segment din punctul de observare de pe Pământ, calculat cu ajutorul desenului din figura 4.7, este:

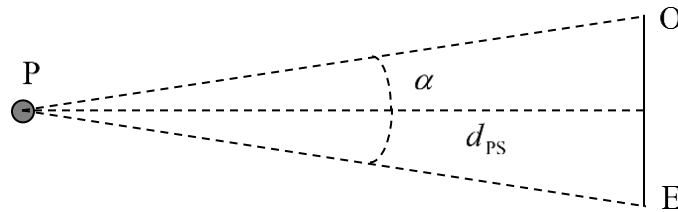


Fig. 4.7

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{OE}{2}}{d_{PS}} \approx \frac{\alpha}{2};$$

$$\alpha = \frac{OE}{d_{PS}} = \frac{R_S}{d_{PS}} \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{6,96 \cdot 10^5 \text{ km}}{149.597.870 \text{ km}} \frac{1,41}{2} = 0,003279993 \text{ rad};$$

$$\alpha = 0,003279993 \cdot \frac{180 \cdot 60'}{3,14} \approx 11,3'.$$

Lungimea segmentului OC de pe discul Soarelui, are lungimea:

$$OC = R_s + R_v,$$

astfel încât unghiul sub care se vede acest segment din punctul de observare de pe Pământ, calculat cu ajutorul desenului din figura 4.8, este:

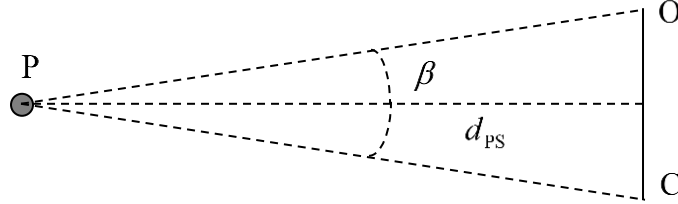


Fig. 4.8

$$\sin \frac{\beta}{2} = \frac{\frac{OC}{2}}{d_{PS}} \approx \frac{\beta}{2};$$

$$\beta = \frac{OC}{d_{PS}} = \frac{R_s + R_v}{d_{PS}} = \frac{6,96 \cdot 10^5 \text{ km} + 0,949 \cdot 6378 \text{ km}}{149.597.870 \text{ km}} = 0,004692933 \text{ rad};$$

$$\beta = 0,004692933 \cdot \frac{180 \cdot 60'}{3,14} \approx 16,15'.$$

Din triunghiul dreptunghic COE de pe discul Soarelui, rezultă:

$$CE = \sqrt{OC^2 - OE^2} = \sqrt{(R_s + R_v)^2 - \frac{R_s^2}{2}};$$

$$CD = 2 \cdot CE = 2 \sqrt{(R_s + R_v)^2 - \frac{R_s^2}{2}},$$

astfel încât unghiul sub care se vede acest segment (CD) din punctul de observare de pe Pământ, calculat cu ajutorul desenului din figura 4.9, este:

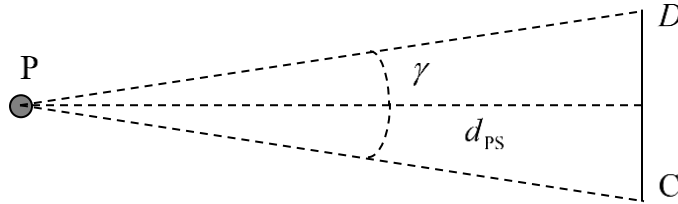


Fig. 4.9

$$\sin \frac{\gamma}{2} = \frac{\frac{CD}{2}}{d_{PS}} \approx \frac{\gamma}{2};$$

$$\gamma = \frac{CD}{d_{PS}} = \frac{2\sqrt{(R_s + R_v)^2 - \frac{R_s^2}{2}}}{d_{PS}} \approx \frac{2\sqrt{\frac{R_s^2}{2}}}{d_{PS}} = \frac{2R_s}{d_{PS}\sqrt{2}};$$

$$\gamma = \frac{2R_s}{d_{PS}\sqrt{2}} = \frac{2 \cdot 6,96 \cdot 10^5 \text{ km}}{1,41 \cdot 149.597.870 \text{ km}} = 0,006599252 \text{ rad};$$

$$\gamma = 0,006599252 \cdot \frac{180 \cdot 60'}{3,14} \approx 24,0'.$$

Utilizând desenul din figura 4.10, calculăm viteza unghiulară relativă a lui Venus în raport cu Pământul, cunoscând vitezele unghiulare ale lui Venus și a Pământului în raport cu Soarele:

$$\vec{\omega}_{VP} = \vec{\omega}_{Venus} - \vec{\omega}_{Pamant};$$

$$\omega_{VP} = \omega_{Venus} - \omega_{Pamant} = \frac{2\pi}{T_{Venus}} - \frac{2\pi}{T_{Pamant}} = 2\pi \frac{T_P - T_V}{T_P T_V};$$

$$\omega_{VP} = 124 \cdot 10^{-9} \frac{\text{rad}}{\text{s}} \approx 4,29 \cdot 10^{-4} \frac{'}{\text{s}}.$$

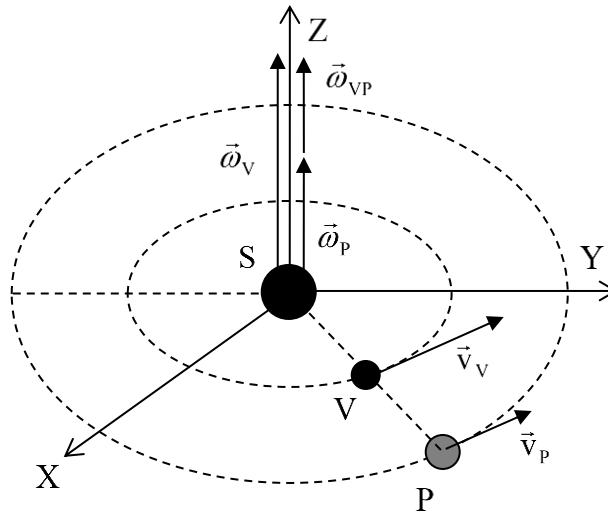


Fig. 4.10

Așa cum indică figura 4.11, în raport cu observatorul de pe Pământ, pe durata tranzitului, Venus se deplasează în limitele unghiurilor θ și respectiv φ , pentru care, din triunghiurilor dreptunghice ECF și respectiv ECO, putem scrie:

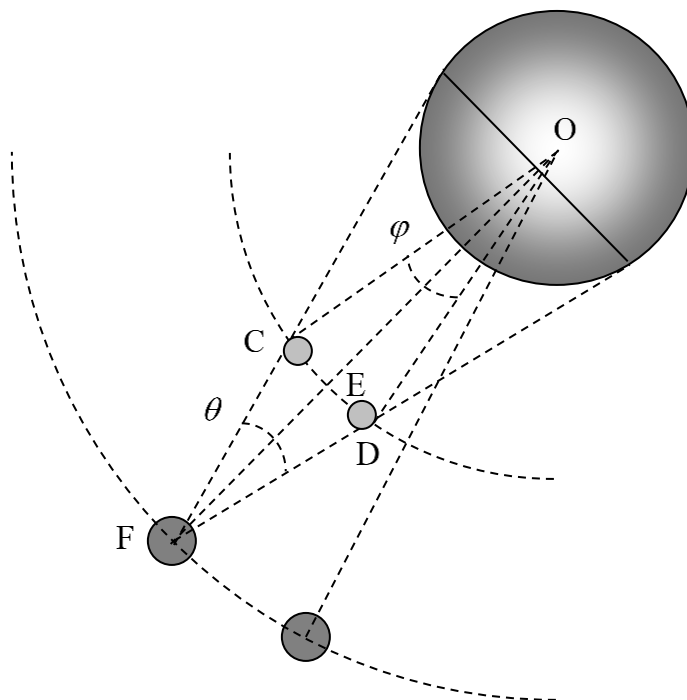


Fig. 4.11

$$\tan \frac{\theta}{2} = \frac{CD/2}{d_{PS} - d_{VS}},$$

unghiul θ fiind chiar unghiul sub care se vede segmentul CD din punctul de observare de pe Pământ, adică:

$$\theta = \gamma = 24,0'.$$

$$\tan \frac{\varphi}{2} = \frac{CD/2}{d_{VS}},$$

astfel încât rezultă:

$$\frac{\tan \frac{\theta}{2}}{\tan \frac{\varphi}{2}} = \frac{d_{VS}}{d_{PS} - d_{VS}} = \frac{0,723 \text{ UA}}{(1 - 0,723) \text{ UA}} = \frac{0,723}{0,277} \approx 2,61;$$

$$\tan \frac{\theta}{2} = \tan 12,0' = \tan 0,2^\circ \approx 0,003490673$$

$$\tan \frac{\varphi}{2} = \frac{\tan \frac{\theta}{2}}{2,61} = \frac{0,003490673}{2,61} = 0,001337422;$$

$$\frac{\varphi}{2} \approx 4,5975'; \varphi = 9,195'.$$

În aceste condiții, durata tranzitului lui Venus și respectiv ora încheierii tranzitului lui Venus, se calculează astfel:

$$\Delta t = \frac{\varphi}{\omega_{VP}} = \frac{9,195'}{4,29 \cdot 10^{-4} \frac{1}{s}} = 21.433,56643 s;$$

$$\Delta t = 5 \text{ h } 57 \text{ min } 13,5 \text{ s};$$

$$t = t_0 + \Delta t = 14^{\text{h}} 57^{\text{min}} 13^{\text{s}}.$$

3.12. Variația razei orbitei Pământului. Datorită reacțiilor termo-nucleare din centrul Soarelui, masa Soarelui scade permanent. *Să se determine* creșterea razei orbitei Pământului, ca urmare a scăderii masei Soarelui, după un timp $\Delta t = 100$ ani. În tot acest timp orbita Pământului rămâne circulară. Se cunosc: luminozitatea Soarelui, $L_s = 3,83 \cdot 10^{26} \text{ W}$; raza orbitei Pământului, $r_0 = 15 \cdot 10^7 \text{ km}$; viteza luminii în vid, $c = 3 \cdot 10^8 \text{ ms}^{-1}$; masa Soarelui, $M_0 = 1,99 \cdot 10^{30} \text{ kg}$.

Rezolvare

3.12. Din definiția luminozității, scrisă pentru Soare, rezultă:

$$L_s = -\frac{\Delta E}{\Delta t} = -\frac{c^2 \Delta M}{\Delta t} = -c^2 \frac{dM}{dt} = -c^2 \dot{M};$$

$$\dot{M} = -\frac{L_s}{c^2} = -\frac{3,83 \cdot 10^{26} \text{ W}}{(3 \cdot 10^8 \text{ ms}^{-1})^2} \approx 4,25 \cdot 10^9 \frac{\text{kg}}{\text{s}},$$

reprezentând variația masei Soarelui în unitatea de timp, datorită reacțiilor termo-nucleare care au loc în nucleul său.

Într-un anumit moment al evoluției sale în jurul Soarelui, viteza Pământului, pe orbita sa circulară, este dată de expresia:

$$v^2 = K \frac{M}{r},$$

unde r este raza orbitei sale corespunzătoare aceluși moment, iar M este masa Soarelui, corespunzătoare aceluiași moment.

În procesul analizat, raza orbitei Pământului crește, iar viteza Pământului scade corespunzător, totul desfășurându-se cu respectarea conservării momentului cinetic al Pământului, ($\vec{l} = \text{constant}$), deoarece:

$$\frac{\Delta \vec{l}}{\Delta t} = \vec{r} \times \vec{F} = 0; \angle(\vec{r}; \vec{F}) = 180^\circ; \Delta \vec{l} = 0; \vec{l} = \text{constant};$$

$$l = rmv = \text{constant},$$

unde m este masa Pământului (care rămâne constantă).

În aceste condiții, rezultă:

$$v = \frac{l}{rm}; \quad v^2 = \frac{l^2}{r^2 m^2};$$

$$\frac{l^2}{r^2 m^2} = K \frac{M}{r}; \quad r = \frac{l^2}{KMm^2};$$

$$\begin{aligned}
M &= f(t); \rightarrow r = g(t); \\
\frac{dr}{dt} = \dot{r} &= \frac{l^2}{Km^2} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{M} \right) = \frac{l^2}{Km^2} \left(-\frac{1}{M^2} \frac{dM}{dt} \right) = -\frac{l^2}{Km^2 M^2} \frac{dM}{dt}; \\
\dot{r} &= -\frac{l^2}{Km^2 M^2} \dot{M} = -\frac{r^2 m^2 v^2}{Km^2 M^2} \dot{M}; \\
\dot{r} &= -\frac{r^2 v^2}{KM^2} \dot{M} = -\frac{r^2}{KM^2} K \frac{M}{r} \dot{M} = -\frac{r}{M} \dot{M}; \\
\frac{\dot{r}}{r} &= -\frac{\dot{M}}{M}; \\
\dot{r} &= -r \frac{\dot{M}}{M}.
\end{aligned}$$

Să admitem că variațiile produse sunt foarte mici, astfel încât:

$$r \approx r_0; \quad M \approx M_0;$$

$$\dot{r} \approx -r_0 \frac{\dot{M}}{M_0} = -1,5 \cdot 10^{11} \text{ m} \cdot \frac{(-4,25 \cdot 10^9 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1})}{1,99 \cdot 10^{30} \text{ kg}};$$

$$\dot{r} = 1,5 \cdot 10^{11} \cdot \frac{4,25 \cdot 10^9 \text{ ms}^{-1}}{1,99 \cdot 10^{30}} = 3,2 \cdot 10^{-10} \frac{\text{m}}{\text{s}};$$

$$\dot{r} = \frac{\Delta r}{\Delta t} = 3,2 \cdot 10^{-10} \frac{\text{m}}{\text{s}}; \quad \Delta t = 100 \text{ ani};$$

$$\Delta r = 3,2 \cdot 10^{-10} \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 100 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 3600 \text{ s} \approx 1,01 \text{ m}.$$

3.13. Distanța dintre Marte și Soare. La vremea sa, Nicholas Copernicus nu știa nimic despre legile lui Keppler. Și totuși, el a determinat distanța dintre Marte și Soare, după acceptarea convingerii revoluționare că toate planetele orbitează în jurul Soarelui și nu în jurul Pământului. *Să se determine* distanța dintre Marte și Soare, știind că, perioada lui Marte este $T_M = 687$ zile, iar pentru un observator de pe Pământ, intervalul de timp dintre opoziția și cuadratura lui Marte este $\Delta t = 106$ zile. Se cunosc: perioada rotației Pământului, $T_p = 365$ zile; distanța Pământ – Soare, $r_{pS} = 1$ ua.

Rezolvare

3.13. În acord cu desenul din figura 3.18, rezultă:

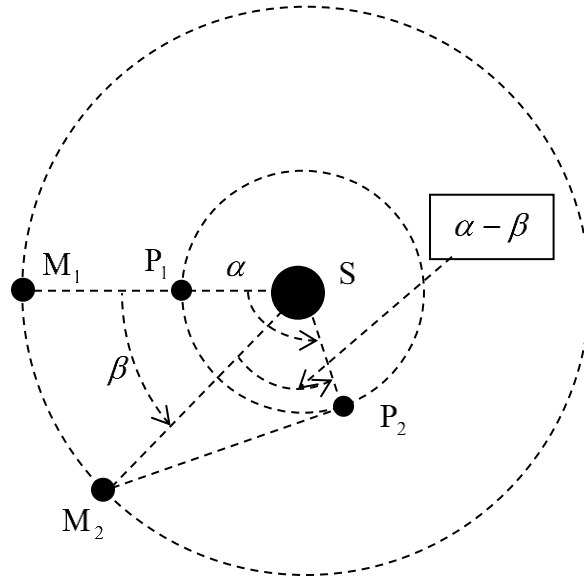


Fig. 3.18

$$\alpha = \omega_p \Delta t = \frac{2\pi}{T_p} \Delta t; \quad \beta = \omega_M \Delta t = \frac{2\pi}{T_M} \Delta t;$$

$$\alpha - \beta = 2\pi \left(\frac{1}{T_p} - \frac{1}{T_M} \right) \Delta t = 2\pi \frac{T_M - T_p}{T_M T_p} \Delta t;$$

$$\alpha - \beta = 2 \cdot 3,14 \text{ rad} \frac{687 \text{ zile} - 365 \text{ zile}}{687 \text{ zile} \cdot 365 \text{ zile}} 106 \text{ zile} \approx 0,85 \text{ rad} = 49^\circ;$$

$$\Delta M_2 S P_2; \cos(\alpha - \beta) = \frac{S P_2}{S M_2} = \frac{r_{PS}}{r_{MS}};$$

$$r_{MS} = \frac{r_{PS}}{\cos(\alpha - \beta)} = \frac{1 \text{ ua}}{\cos 49^\circ} = \frac{1 \text{ ua}}{0,656} \approx 1,52 \text{ ua}.$$

3.14. Satelit la meridianul locului. Un satelit se deplasează în jurul Pământului, pe o orbită circulară, aflată în planul ecuatorului. Un observator din Teheran, aflat la latitudinea $\varphi = 35,6^\circ \text{ N}$, constată că atunci când satelitul trece la meridianul locului, distanța sa zenitală este $z = 46,0^\circ$. Să se determine distanța de la satelit până la centrul Pământului, exprimat în raze terestre, R_p .

Rezolvare

3.14. Din figura 3.19, rezultă:

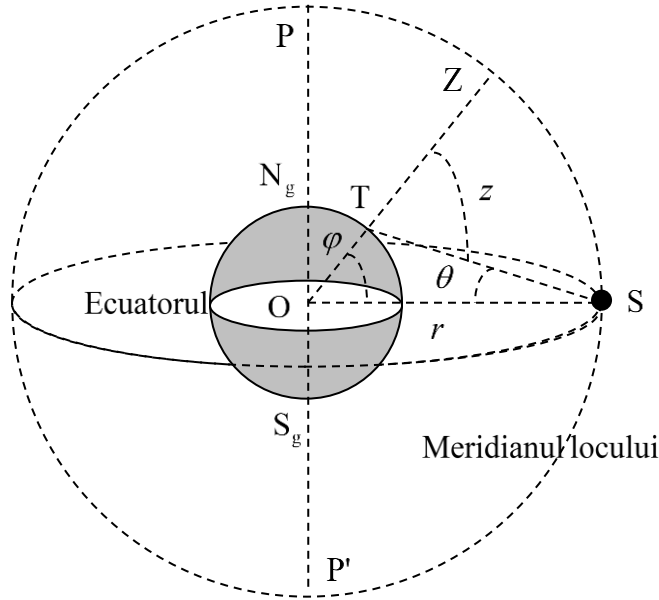


Fig. 3.19

$$\begin{aligned}\angle(OTS) &= 180^\circ - z = 180^\circ - 46^\circ = 134^\circ; \\ \theta &= 180^\circ - \varphi - \angle(OTS) = 180^\circ - 35,6^\circ - 134^\circ = 10,4^\circ; \\ \Delta OTS; \frac{r}{\sin(180^\circ - z)} &= \frac{R_p}{\sin \theta}; \\ r &= \frac{\sin(180^\circ - z)}{\sin \theta} R_p = \frac{\sin 134^\circ}{\sin 10,4^\circ} R_p = \frac{0,719}{0,180} R_p \approx 4 \cdot R_p.\end{aligned}$$

3.15. Sistem stelar binar. Un sistem stelar binar este alcătuit din două stele identice, care, datorită interacțiunii lor gravitaționale, nu mai sunt sferice, fiecare având forma unui elipsoid de rotație, ale căui semiaxe, mare și respectiv mică, sunt a și respectiv b , pentru care $a = 2b$. Axele mari ale celor doi elipsoizi sunt permanent coliniare. Planul orbitelor celor două stele este perpendicular pe planul cerului. Să se determine amplitudinea variațiilor luminii în magnitudine (Δm), ca rezultat al mișcărilor orbitale ale celor două stele.

Rezolvare

3.15. Neglijând variațiile temperaturilor de la suprafețele celor două stele, în orice moment strălucirea observată a sistemului stelar considerat va fi proporțională cu aria suprafețelor reprezentând proiecțiile ambelor stele pe planul cerului.

Strălucirea maximă se va obține atunci când cei doi elipsoizi, fără să se eclipseze unul pe celălalt, vor fi văzuți în proiecție pe sfera cerească așa cum indică figura 3.20, atunci când aria suprafețelor proiecțiilor celor două stele este maximă:

$$S_{\max} = 2\pi ab; \quad I_{\max} = kS_{\max} = k2\pi ab.$$

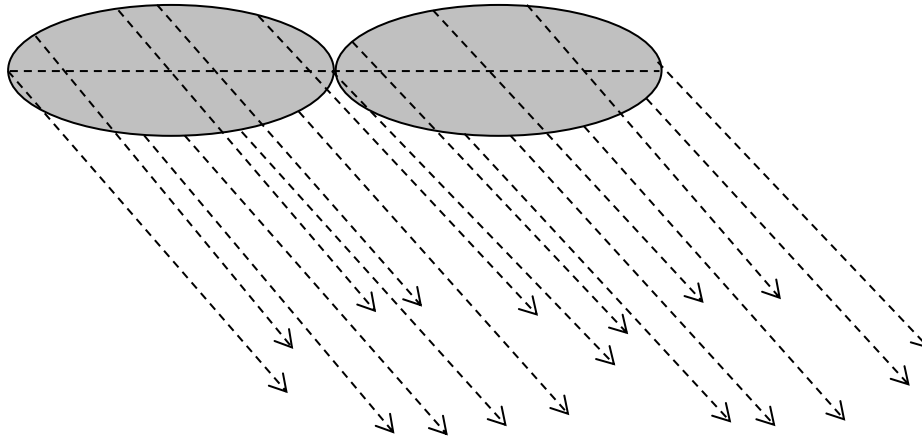


Fig. 3.20

Strălucirea minimă se va obține atunci când cei doi elipsoizi, eclipsându-se total unul pe celălalt, vor fi văzuți în proiecție pe sfera cerească așa cum indică figura 3.21, atunci când aria suprafețelor proiecțiilor celor două stele este minimă:

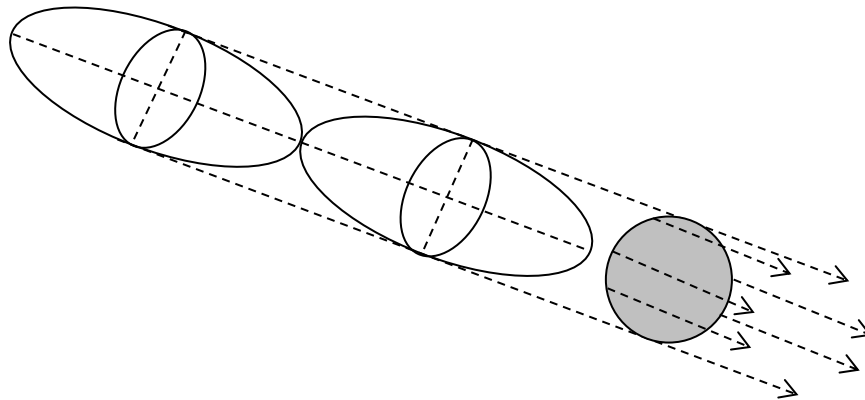


Fig. 3.21

$$S_{\min} = \pi b^2; \quad I_{\min} = kS_{\min} = k\pi b^2.$$

În aceste condiții, rezultă:

$$\Delta m = -2,5^{\text{m}} \cdot \log \frac{I_{\max}}{I_{\min}} = -2,5^{\text{m}} \cdot \log \frac{k2\pi ab}{k\pi b^2} = -2,5^{\text{m}} \cdot \log \frac{2a}{b};$$

$$\Delta m = -2,5^{\text{m}} \cdot \log \frac{4b}{b} = -2,5^{\text{m}} \cdot \log 4 = -2,5^{\text{m}} \cdot 0,6 = -1,5^{\text{m}}.$$

3.16. Altitudinea maximă a unui proiectil ballistic. Dintr-un punct, aflat la nivelul mării, pe ecuatorul Pământului, se lansează un proiectil ballistic, în planul ecuatorului, cu viteza inițială $v_0 = \sqrt{KM/R}$, unde M și R sunt masa și respectiv raza Pământului, pe o direcție care formează

cu orizontul local un unghi $\varphi = \pi/6$. Nu se iau în considerare rotația Pământului și nici rezistența la înaintare întâmpinată de proiectil din partea aerului. K este constanta atracției universale.

a) Să se arate că traiectoria proiectilului este o elipsă a cărei semiaxă mare este $a = R$.

b) Să se calculeze altitudinea maximă a proiectilului, față de nivelul mării, exprimând-o în raze terestre.

c) Să se determine distanța (măsurată în linie dreaptă) dintre punctul din care a fost lansat proiectilul și punctul unde a căzut proiectilul pe suprafața Pământului.

d) Să se determine excentricitatea numerică a elipsei.

e) Să se determine timpul de zbor al proiectilului.

Rezolvare

3.16. a) Corespunzător momentului lansării proiectilului, energia mecanică totală a sistemului proiectil – Pământ, este:

$$E = \frac{m v_0^2}{2} - K \frac{mM}{R} = \frac{m}{2} K \frac{M}{R} - K \frac{mM}{R} = -K \frac{mM}{2R} < 0,$$

ceea ce dovedește că traiectoria proiectilului poate fi o elipsă sau un cerc. Deoarece $\varphi > 0$, înseamnă că traiectoria proiectilului este o elipsă, cu semiaxele a și b , care, având centrul Pământului în unul din focarele sale, arată, în cazul general, așa cum indică figura 3.22.

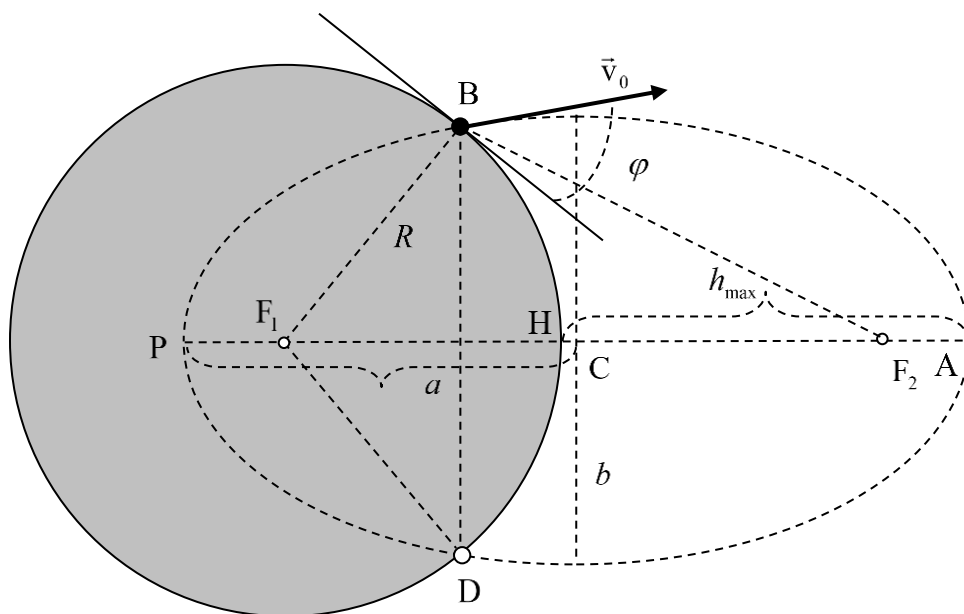


Fig. 3.22

Se știe însă că, în general, atunci când traiectoria unui punct material în câmpul gravitațional radial al unei planete este o elipsă, energia mecanică totală a sistemului punct material – planetă este dată de expresia:

$$E = -K \frac{mM}{2a},$$

ceea ce confirmă că traiectoria proiectilului balistic, lansat în condițiile precizate, este o elipsă având semi-axa mare $a = R$, așa cum indică figurile 3.23 și 3.24, unde, unul dintre focarele elipsei, F_1 , este chiar centrul Pământului.

Pentru că $a = R$, intersecția elipsei cu cercul ecuatorului nu poate fi decât în punctele corespunzătoare extremităților axei mici a elipsei. Ca urmare, direcția vectorului $\vec{v}_0$, tangentă la elipsă (traiectorie), este paralelă cu axa mare a elipsei.

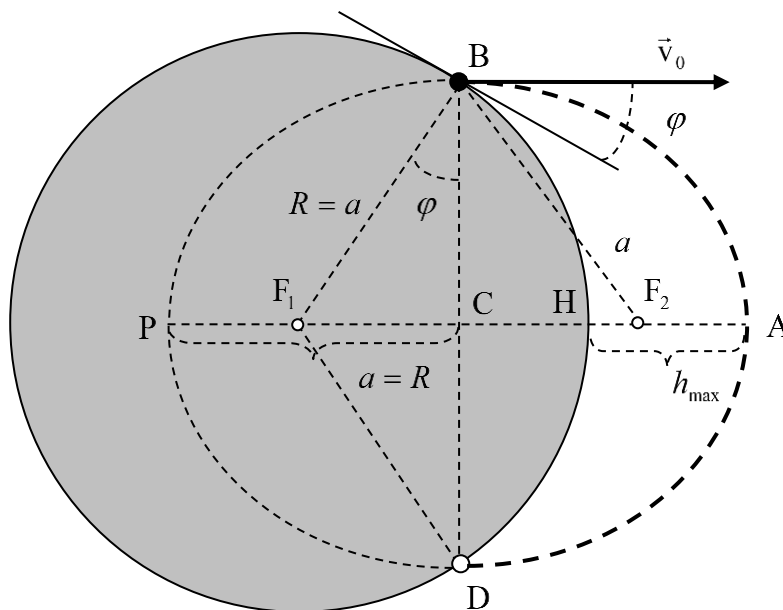


Fig. 3.23

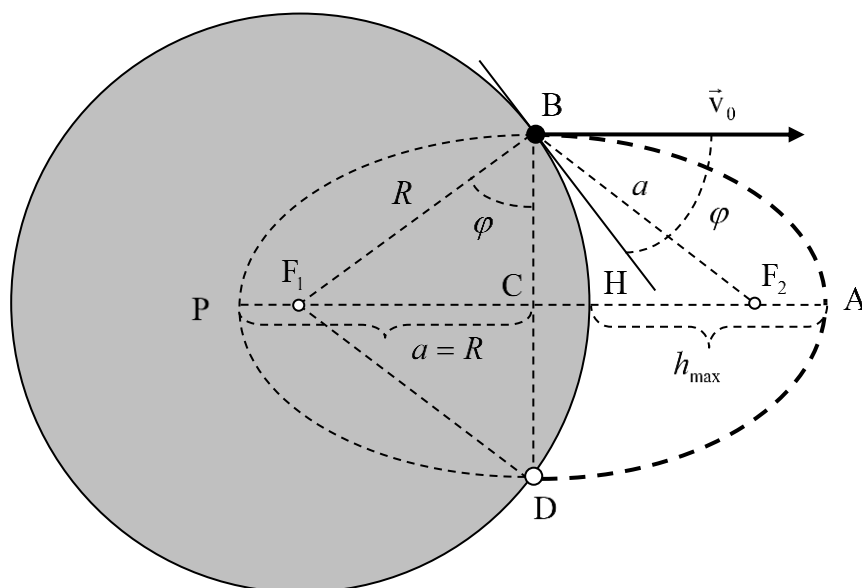


Fig. 3.24

b) Din geometriile figurilor anterioare, rezultă:

$$h_{\max} = d_{AC} - d_{CH} = a - (R - R \sin \varphi) = a - R(1 - \sin \varphi);$$

$$a = R; h_{\max} = R \sin \varphi = \frac{R}{2},$$

ceea ce confirmă valabilitatea primei variante grafice.

c)

$$d_{BD} = l_{\text{arc}(BHD)} = 2 \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) \cdot R = (\pi - 2\varphi) \cdot R = \frac{2\pi}{3} R.$$

d) Pentru un moment oarecare, din evoluția proiectilului balistic pe traiectoria în formă de elipsă, reprezentată în figura 3.25, proiectilul fiind în punctul P, ecuația traiectoriei, în coordonate polare plane, este:

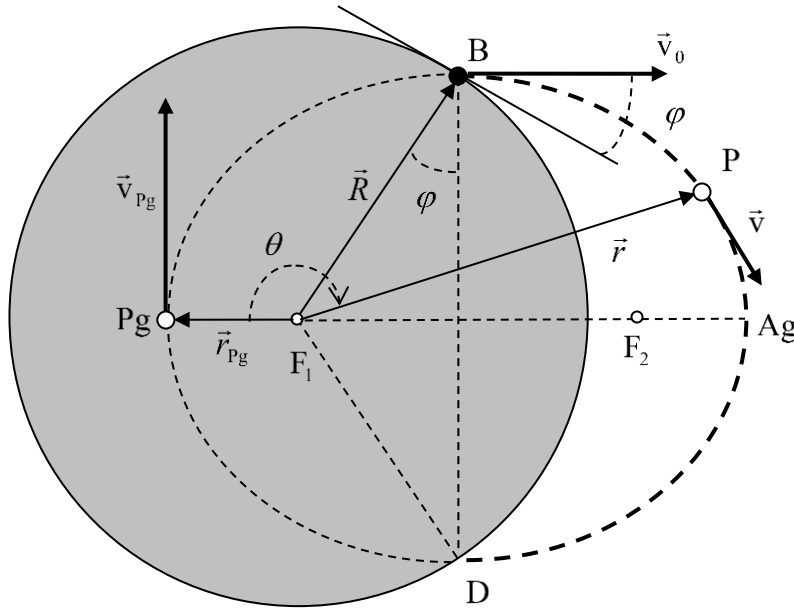


Fig. 3.25

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e \cos \theta},$$

din care, corespunzător momentului lansării proiectilului din punctul B, rezultă:

$$r = R; \theta = \frac{\pi}{2} + \varphi; a = R;$$

$$R = \frac{R(1-e^2)}{1+e \cos \left(\frac{\pi}{2} + \varphi \right)}; e = \sin \varphi = \frac{1}{2}.$$

e) Pe durata Δt a zborului proiectilului balistic din punctul de lansare (B) și până în punctul de cădere (D), raza vectoare a acestuia mătură suprafața sectorului F_1BADF_1 , evidențiat în figura 3.26, aria sa fiind:

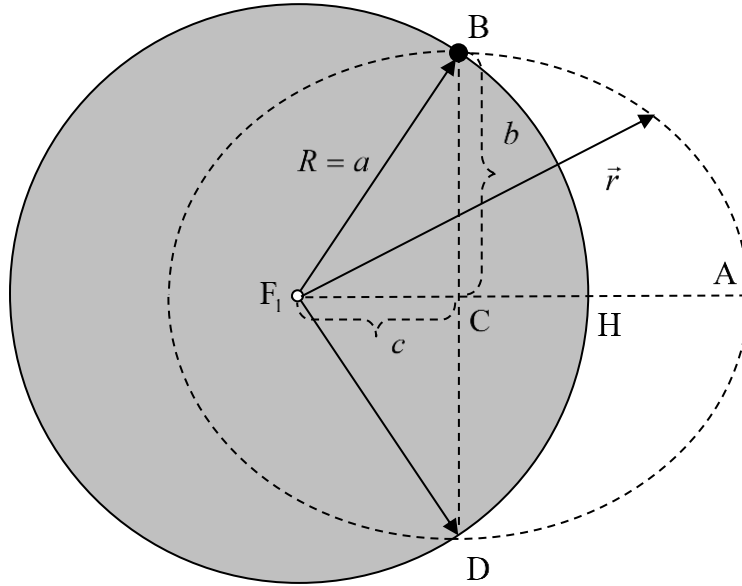


Fig. 3.26

$$\Delta S = S_{\Delta F_1BD} + \frac{S_0}{2},$$

unde S_0 este aria suprafeței întregii elipse;

$$S_{\Delta F_1BD} = \frac{1}{2} 2bc = \frac{1}{2} 2b\sqrt{a^2 - b^2} = b\sqrt{a^2 - b^2};$$

$$e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}; \quad c = \sqrt{a^2 - b^2} = ea;$$

$$S_{\Delta F_1BD} = eab;$$

$$S_0 = \pi ab;$$

$$\Delta S = eab + \frac{\pi ab}{2} = ab \left(e + \frac{\pi}{2} \right).$$

În acord cu legea a doua a lui Kepler, rezultă:

$$\frac{\Delta S}{S_0} = \frac{\Delta t}{T},$$

unde T este perioada proiectilului ballistic, dacă el ar putea evolua pe întreaga elipsă.

În acord cu legea a treia a lui Kepler, rezultă:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{KM}} = 2\pi \sqrt{\frac{R^3}{KM}} \approx 84,5 \text{ min};$$

$$\Delta t = T \frac{\Delta S}{S_0} = T \frac{e + \frac{\pi}{2}}{\pi} \approx 55,7 \text{ min.}$$

4.7. Exoplanete locuibile. Există interes în a descoperi exoplanete locuibile. O modalitate de a realiza acest lucru este aceea de a observa tranzitul unei exoplanete prin fața stelei în jurul căreia ea orbitează, atunci când luminozitatea discului stelar scade, pentru că o parte din lumina stelei este estompată. *Să se estimeze* raportul maxim al variației luminozității pentru o exoplanetă asemănătoare Pământului, ce orbitează în jurul unei stele asemănătoare cu Soarele.

Rezolvare

4.7. Fluxul radiațiilor emise de Soare (luminozitatea Soarelui), reprezentând energia emisă de Soare, prin toată suprafața sa, în unitatea de timp, este direct proporțional cu aria suprafeței Soarelui, adică:

$$\Phi_S = L_S = k4\pi R_S^2.$$

Când tranzitul planetei (Pământului) prin fața Soarelui se face în așa fel încât discul Soarelui este acoperit în totalitate, luminozitatea Soarelui prezintă variația maximă, ea reducându-se la luminozitatea Pământului, adică:

$$\Phi_P = L_P = k4\pi R_P^2.$$

Ca urmare, în condiții de estompăre totală a radiațiilor emise de Soare, valoarea maximă a raportului luminozităților este:

$$\frac{L_P}{L_S} = \left(\frac{R_P}{R_S} \right)^2 = \left(\frac{R_P}{110 \cdot R_P} \right)^2 = \frac{1}{110^2} = \frac{1}{12100} \approx 0,000082 = 8,2 \cdot 10^{-5} \approx 10^{-4},$$

ceea ce, evident, înseamnă extrem de puțin.

4.8. Gaură Neagră super – masivă. În Centrul Galactic se presupune că se află o gaură neagră super-masivă, având masa $M = 4 \cdot 10^6 M_S$. Comunitatea astronomică are sarcina dificilă de a rezolva orizontul evenimentului. Acesta, pentru o gaură neagră, care nu se rotește, este chiar raza Schwarzschild, $R_{Sch} = 3 \left(\frac{M}{M_S} \right) \text{ km}$. Se consideră folosirea unui telescop a cărui oglindă are diametrul egal cu diametrul Pământului (utilizând Very Long Baseline Interferometry). *Să se determine* lungimea de undă a radiației care ar trebui să fie folosită în scopul obținerii rezoluției cerută de problemă? Soarele este situat la distanța $L = 8,5 \text{ kpc}$ față de Centrul Galactic. Raza Pământului este $R_P = 6.370 \text{ km}$.

Rezolvare

4.8. Deschiderea unghiulară a acestei găuri negre, cu diametrul $2R_{Sch}$, situată la distanța L față de centrul Galaxiei, este:

$$\theta_{GN} = \frac{2R_{Sch}}{L}.$$

Pe de altă parte, se știe că rezoluția telescopului utilizat, trebuie să fie:

$$\theta_{\text{tel}} = \frac{1,22 \cdot \lambda}{D_{\text{tel}}} = \frac{1,22 \cdot \lambda}{2R_p}.$$

Pentru identificarea găurii negre din centrul galaxiei este nevoie ca $\theta_{\text{GN}} \geq \theta_{\text{tel}}$, astfel încât, la limită:

$$\theta_{\text{GN}} = \theta_{\text{tel}},$$

din care rezultă:

$$\lambda = \frac{4R_p R_{\text{Sch}}}{1,22 \cdot L} \approx 0,98 \text{ mm},$$

ceea ce presupune că observarea trebuie să se facă în domeniul undelor cu frecvențe sub milimetrice, adică în domeniul undelor radio sau în banda infraroșie îndepărtată.

4.9. Numărul de fotoni. Măsurată în banda I, mărimea unei stele este $m_1 = 22^{\text{m}},0$. Să se determine numărul de fotoni, provenind de la această stea, care sosesc în fiecare secundă pe oglinda telescopului Gemini, al cărei diametru este $D = 8 \text{ m}$. Se presupune că eficiența cuantică totală este $\eta = 40\%$ și că filtrul trece bandă este plat. Se pot folosi următoarele informații referitoare la steaua Vega. Se cunosc: constanta lui Planck, $h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$; viteza luminii în vid, $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$.

Filtru	$\lambda_0(\text{nm})$	$\Delta\lambda(\text{nm})$	$F_{\text{Vega}} (\text{J} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{nm}^{-1})$
I	800,0	24,0	$8,30 \cdot 10^{-12}$

Rezolvare

4.9. Se știe că scara magnitudinilor aparente este o scară logaritmică a iluminărilor stelelor, astfel încât relația dintre iluminările a două stele și magnitudinile lor aparente, este:

$$\log \frac{E_1}{E_2} = -(m_1 - m_2) \log(\sqrt[5]{100}),$$

din care rezultă:

$$\frac{E_1}{E_2} = 10^{-0,4(m_1 - m_2)}.$$

Dacă valoarea zero a magnitudinii aparente a fost dată prin convenție magnitudinii stelei Vega ($m_2 = 0$), iluminarea dată de steaua Vega fiind $E_2 = E_0$, atunci iluminarea dată de steaua cu mărimea aparentă $m_1 = 22^{\text{m}},0$ este $E_1 = E_1$, astfel încât:

$$\log \frac{E_1}{E_0} = -0,4 \cdot m_1;$$

$$m_1 = -2,5 \cdot \log|E_1| + 2,5 \cdot \log|E_0|;$$

$$2,5 \cdot \log|E_0| = \text{constant} = C;$$

$$m_1 = -2,5 \cdot \log|E_1| + C,$$

din care, prin particularizare pentru steaua Vega, rezultă:

$$0 = -2,5 \cdot \log|8,30 \cdot 10^{-12}| + C;$$

$$0 = -2,5(\log 8,3 + \log 10^{-12}) + C;$$

$$0 = -2,5(0,9 - 12) + C; C \approx -27,7;$$

$$m_1 = -2,5 \cdot \log|E_1| - 27,7;$$

$$\log|E_1| = \frac{m_1 + 27,7}{-2,5};$$

$$|E_1| = 10^{(m_1 + 27,7)/(-2,5)} = 10^{-19,88} = \frac{10^{-0,12}}{10^{-0,12}} \cdot 10^{-19,88} = 10^{0,12} \cdot 10^{-20} \approx 1,3 \cdot 10^{-20};$$

$$E_1 = 1,3 \cdot 10^{-20} \text{ J} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{nm}^{-1},$$

reprezentând energia adusă, corespunzătoare unității lungimii de undă, într-o unitate de timp, pe o unitate de arie a suprafeței, când filtrul utilizat a permis lucrul cu radiația de la stea având lungimea de undă efectivă $\lambda_0 = 800 \text{ nm}$.

În aceste condiții, numărul de fotoni, incident pe oglinda telescopului, corespunzător unității lungimii de undă, în unitatea de timp, pe unitatea de arie a suprafeței, este:

$$N_1 = \frac{E_1}{\frac{hc}{\lambda_0}} = \frac{1,3 \cdot 10^{-20} \text{ J} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{nm}^{-1}}{\frac{6,63 \cdot 10^{-34} \text{ Js} \cdot 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{800 \cdot 10^{-9} \text{ m}}} \approx 5,3 \cdot 10^{-2} \text{ fotoni} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{nm}^{-1}.$$

$$N_{I,\text{total}} = S_{\text{oglină telescop}} \cdot \eta \cdot \Delta\lambda \cdot N_1;$$

$$N_{I,\text{total}} = \frac{\pi D^2}{4} \cdot \eta \cdot \Delta\lambda \cdot N_1;$$

$$N_{I,\text{total}} = 3,14 \cdot 16 \cdot \text{m}^2 \cdot 0,4 \cdot 24 \text{ nm} \cdot 5,3 \cdot 10^{-2} \text{ fotoni} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{nm}^{-1};$$

5.1. Cometă singuratică în Sistemul Solar. Sosită direct din Norul Oort, o cometă își face apariția în Sistemul Solar. *Să se estimeze* timpul necesar cometei pentru a efectua această călătorie. În Norul Oort, cometa se afla la apheliul orbitei sale, la distanța $r_{\text{apheliu}} = 35000 \text{ UA}$ față de Soare.

Rezolvare

5.1. Deoarece elipsa, reprezentând traiectoria cometei, este foarte alungită, rezultă:

$$r_{\text{periheliu}} + r_{\text{apheliu}} = 2a;$$

$$r_{\text{periheliu}} \ll r_{\text{apheliu}}; a = \frac{1}{2} r_{\text{apheliu}}; a \approx 17.500 \text{ UA}.$$

În acord cu legea a treia a lui Kepler, rezultă:

$$T^2 = ka^3 = \frac{4\pi^2}{KM} a^3; T = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{KM}} \approx 2,3 \cdot 10^6 \text{ ani},$$

astfel încât, durata călătoriei cometei din Norul Oort și până în Sistemul Solar este:

$$t = \frac{T}{2} = 1,15 \cdot 10^6 \text{ ani}.$$

5.2. Numărul de stele dintr-un roi globular. Viteza de evadare a unui corp, de la suprafața unui roi globular, este $v_0 = 6 \text{ km/s}$. Să se estimeze numărul de stele din roiul globular, dacă diametrul roiului este $d = 40 \text{ pc}$. Se știe că cele mai multe stele din roi sunt asemănătoare

Soarelui. Se cunosc: masa Soarelui, $M_s = 1,99 \cdot 10^{30}$ kg; constanta atracției universale, $K = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2 \text{ kg}^{-2}$.

Rezolvare

5.2. Un obiect de la periferia roiului globular va părăsi roiul, dacă viteza sa este:

$$v_0 = v_{II} = \sqrt{2K \frac{nM_s}{R}},$$

din care rezultă:

$$n = \frac{v_0^2 d}{4KM_s} = \frac{36 \frac{\text{km}^2}{\text{s}^2} \cdot 40 \cdot 3,0857 \cdot 10^{13} \text{ km}}{4 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{s}^2 \text{ kg}} \cdot 1,99 \cdot 10^{30} \text{ kg}};$$

$$n = \frac{36 \cdot 3,0857 \cdot 10^4}{6,67 \cdot 1,99} \approx 8,37 \cdot 10^4 = 83700.$$

5.3. Orbita stației Voyager. În ziua de 9 martie 2011 stația Voyager se afla la distanța $r_{v,s} = 116,406$ UA față de Soare și avea viteza $v = 17,062$ km/s. Să se determine tipul orbitei stației: elipsă; parabolă; hiperbolă. Să se determine magnitudinea aparentă a Soarelui, văzut de pe Voyager. Se cunosc: distanța dintre Pământ și Soare, $r_{p,s} = 1$ UA; magnitudinea aparentă a Soarelui, văzut de pe Pământ, $m_{s,p} = -26,84^m$.

Rezolvare

5.3. Corespunzător momentului precizat, energia mecanică totală a sistemului stație – Soare a fost:

$$E = \frac{mv^2}{2} - K \frac{mM_s}{r} = m \left(\frac{v^2}{2} - K \frac{M_s}{r} \right);$$

$$E = m \left[\frac{1}{2} (17,062 \cdot 10^3)^2 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} - 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2} \frac{1,99 \cdot 10^{30} \text{ kg}}{116,406 \cdot 3,0857 \cdot 10^{16} \text{ m}} \right];$$

$$E = m \left[\frac{1}{2} (17,062 \cdot 10^3)^2 - 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{1,99 \cdot 10^{30}}{116,406 \cdot 3,0857 \cdot 10^{16}} \right] \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2};$$

$$E \approx m [145,5 \cdot 10^6 - 37] \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} > 0,$$

ceea ce dovedește că orbita stației era un arc dintr-o hiperbolă.

Notatii: $m_{s,p}$ - magnitudinea aparentă a Soarelui, văzut de pe Pământ; $m_{s,v}$ – magnitudinea aparentă a Soarelui, văzut de pe stația Voyager; $r_{p,s}$ – distanța dintre Pământ și Soare; $r_{v,s}$ – distanța dintre stația Voyager și Soare; I – intensitatea luminoasă a Soarelui; $E_{s,p} = \frac{I}{r_{ps}^2}$, iluminarea pe

care Soarele i-o produce Pământului; $E_{S,V} = \frac{I}{r_{VS}^2}$, iluminarea pe care Soarele i-o produce stației Voyager.

Cu aceste notații, în acord cu formula lui Pogson, rezultă:

$$\frac{E_{S,P}}{E_{S,V}} = \left(\frac{r_{V,S}}{r_{P,S}} \right)^2 = 10^{-0,4(m_{S,P} - m_{S,V})};$$

$$2 \log \frac{r_{V,S}}{r_{P,S}} = -0,4(m_{S,P} - m_{S,V});$$

$$m_{S,V} = m_{S,P} + 5 \log \frac{r_{V,S}}{r_{P,S}} = -26,84^m + 5 \log \frac{116,406 \text{ UA}}{1 \text{ UA}};$$

$$m_{S,V} = -26,84^m + 5 \log(116,406) \approx -26,84^m + 5^m \cdot 2,07 = -16,5^m.$$

5.4. Phobos, deasupra orizontului. Să considerăm că satelitul Phobos, al planetei Marte, se deplasează în jurul planetei pe o orbită circulară, situată în planul ecuatorial al planetei Marte. *Să se determine* durata evoluției lui Phobos deasupra orizontului, pentru un observator de pe suprafața planetei Marte, aflat într-un punct de pe ecuatorul planetei. Se cunosc: raza planetei Marte, $R_M = 3393 \text{ km}$; masa planetei Marte, $M_M = 6,421 \cdot 10^{23} \text{ kg}$; perioada rotației proprii a planetei Marte, $T_M = 24,623 \text{ h}$; raza orbitei lui Phobos, $r_{ph} = 9380 \text{ km}$.

Rezolvare

5.4. Pentru observatorul terestru, aflat în poziția O_r față de centrul planetei Marte (figura 5.1), satelitul său Phobos, al cărui sens în mișcarea sa circulară uniformă este același cu sensul rotației proprii a lui Marte, apare la orizontul locului (răsare) în poziția R. Datorită rotației lui Marte, atunci când Phobos va trece sub orizontul aceluiași loc de observare (apune) în poziția A, observatorul se va afla în poziția O_a față de centrul lui Marte. Pe durata Δt a vizibilității lui Phobos, raza vectoare a observatorului descrie unghiul la centru α , iar raza vectoare a lui Phobos descrie unghiul la centru β .

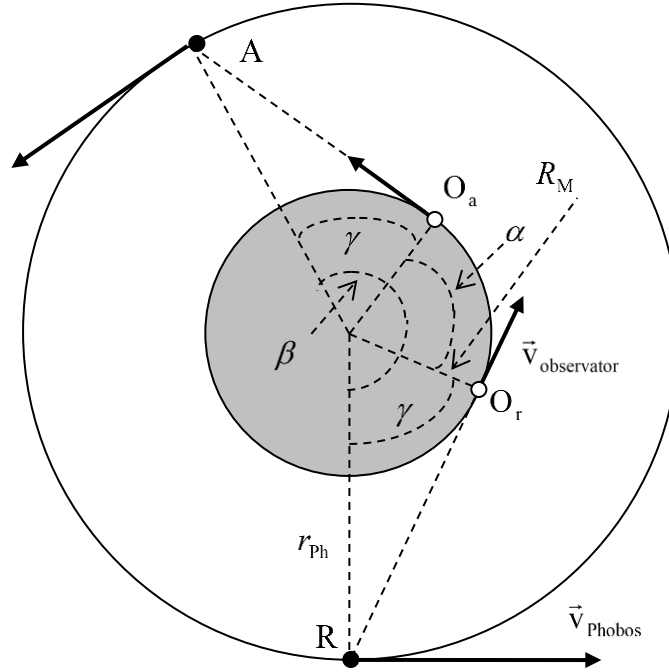


Fig. 5.1

Dacă ω_M și respectiv ω_{ph} sunt viteza unghiulară în mișcarea de rotație proprie a lui Marte și respectiv viteza unghiulară în mișcarea circulară uniformă a lui Phobos, rezultă:

$$\alpha = \omega_M \Delta t; \beta = \omega_{ph} \Delta t =$$

$$\beta = \alpha + 2\gamma; \beta - \alpha = 2\gamma;$$

$$\cos \gamma = \frac{R_M}{r_{Ph}} = \frac{3.393 \text{ km}}{9.380 \text{ km}} \approx 0,36;$$

$$\gamma = 68,794^\circ = 1,2007 \text{ rad};$$

$$(\omega_{ph} - \omega_M) \Delta t = 2\gamma;$$

$$\omega_M = \frac{2\pi}{T_M}; \omega_{ph} = \frac{v_{Ph}}{r_{Ph}} = \frac{1}{r_{Ph}} \sqrt{K \frac{M_M}{r_{Ph}}} = \sqrt{KM_M r_{Ph}};$$

$$\left(\sqrt{KM_M r_{Ph}} - \frac{2\pi}{T_M} \right) \Delta t = 2\gamma;$$

$$\Delta t = \frac{2\gamma}{\sqrt{KM_M r_{Ph}} - \frac{2\pi}{T_M}};$$

$$\Delta t \approx 15.300 \text{ s} = 4 \text{ h } 15 \text{ min}.$$

Problema se poate rezolva și considerând mișcarea circulară relativă a lui Phobos în raport cu Marte. În aceste condiții, dacă Marte este în repaus, așa cum indică figura 5.2, mișcarea lui Phobos se face cu viteza unghiulară:

$$\vec{\omega}_{\text{Ph,M}} = \vec{\omega}_{\text{Ph}} - \vec{\omega}_{\text{M}}; \quad \omega_{\text{Ph,M}} = \omega_{\text{Ph}} - \omega_{\text{M}},$$

astfel încât, în intervalul de timp Δt , de la răsăritul lui Phobos, până la apusul lui Phobos, raza vectoare a lui Phobos a descris unghiul la centru:

$$2\gamma = \omega_{\text{Ph,M}} \Delta t = (\omega_{\text{Ph}} - \omega_{\text{M}}) \Delta t;$$

$$\cos \gamma = \frac{R_{\text{M}}}{r_{\text{Ph}}}.$$

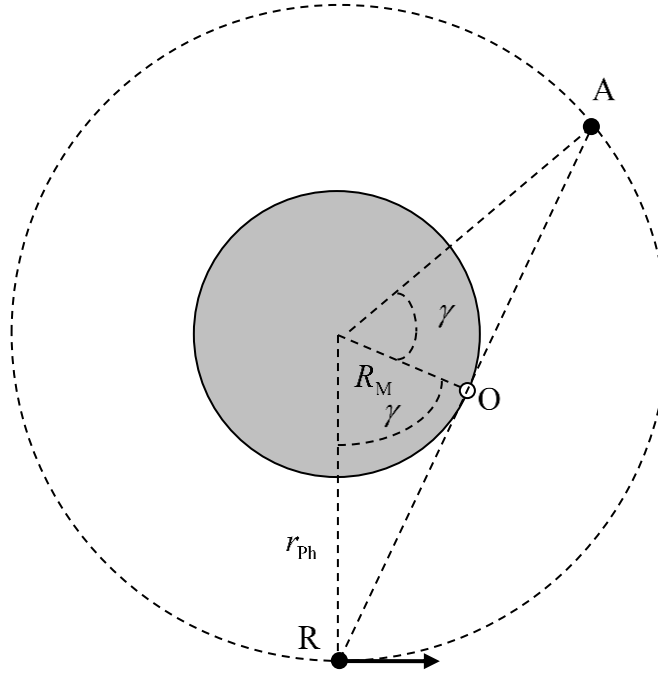


Fig. 5.2

5.5. Radiotelescop. *Să se calculeze* ce diametru ar trebui să aibe oglinda unui radiotelescop, care, lucrând la lungimea de undă $\lambda_{\text{radio}} = 1 \text{ cm}$, ar avea aceeași rezoluție unghiulară ca și un telescop optic, a cărui oglindă are diametrul $D_{\text{optic}} = 10 \text{ cm}$, dacă lungimea de undă a radiației optice este $\lambda_{\text{optic}} = 550 \text{ nm}$.

Rezolvare

5.5. Având în vedere definiția rezoluției unghiulare:

$$\sin \lambda = 1,22 \frac{\lambda}{D},$$

rezultă:

$$\sin \lambda_{\text{radio}} = 1,22 \frac{\lambda_{\text{radio}}}{D_{\text{radiotelescop}}};$$

$$\begin{aligned}
\sin \lambda_{\text{optic}} &= 1,22 \frac{\lambda_{\text{optic}}}{D_{\text{telescop}}}; \\
\sin \lambda_{\text{radio}} &= \sin \lambda_{\text{optic}}; \\
\frac{\lambda_{\text{radio}}}{D_{\text{radiotelescop}}} &= \frac{\lambda_{\text{optic}}}{D_{\text{telescop}}}; \\
D_{\text{radiotelescop}} &= \frac{\lambda_{\text{radio}}}{\lambda_{\text{optic}}} D_{\text{telescop}}; \\
D_{\text{radiotelescop}} &= \frac{1 \text{ cm}}{550 \text{ nm}} \cdot 10 \text{ cm} = \frac{10^{-2} \text{ m}}{550 \cdot 10^{-9} \text{ m}} \cdot 10 \cdot 10^{-2} \text{ m} \approx 1.818 \text{ m}.
\end{aligned}$$

5.6. Efectul forțelor mareice. Ca rezultat al existenței forțelor mareice, se poate vorbi despre efectul momentului acestora asupra mișcării de rotație a Pământului. În ultimele câteva sute de milioane de ani, momentul acestor forțe, precum și durata anului sideral, au fost constante și anume: $M_{\text{fm}} = 6 \cdot 10^{16}$; $1 \text{ as} = 3,15 \cdot 10^7 \text{ s}$. Să se calculeze durata unui an în urmă cu $\Delta t = 6 \cdot 10^8$ ani. Se știe că momentul de inerție al unei sfere, omogenă și plină, cu masa m și raza R , este $I = \frac{2}{5} mR^2$.

Rezolvare

5.6. Dacă un corp solid rigid este supus acțiunii unor forțe exterioare, având ca efect mișcarea de rotație a acestuia, atunci, se știe că:

$$\vec{M} = \frac{\Delta \vec{J}}{\Delta t} = \frac{\Delta(I\vec{\omega})}{\Delta t} = I \frac{\Delta \vec{\omega}}{\Delta t} = I\vec{\varepsilon},$$

reprezentând teorema variației momentului cinetic, unde: $\vec{M}$ – momentul resultant al forțelor exterioare care acționează asupra corpului; $\vec{J}$ – momentul cinetic al corpului solid rigid; I – momentul de inerție al corpului solid rigid; $\vec{\varepsilon}$ – accelerația unghiulară a corpului solid rigid aflat în mișcare de rotație.

În particular, pentru forțele mareice, care acționează asupra Pământului, având ca efect micșorarea vitezei unghiulare a mișcării de rotație proprie a Pământului, rezultă:

$$\begin{aligned}
\vec{M}_{\text{fm}} &= I_{\text{p}} \frac{\Delta \vec{\omega}_{\text{p}}}{\Delta t} = I_{\text{p}} \vec{\varepsilon}_{\text{p}}; M_{\text{fm}} = -I_{\text{p}} \varepsilon_{\text{p}}; I_{\text{p}} = \frac{2}{5} m_{\text{p}} R_{\text{p}}^2; \\
\varepsilon_{\text{p}} &= -\frac{M_{\text{fm}}}{I_{\text{p}}} = -\frac{5}{2} \frac{M_{\text{fm}}}{m_{\text{p}} R_{\text{p}}^2} = -6 \cdot 10^{-22} \frac{1}{\text{s}^2}; \\
\varepsilon_{\text{p}} &= \frac{\Delta \omega_{\text{p}}}{\Delta t}; \Delta \omega_{\text{p}} = \varepsilon_{\text{p}} \Delta t,
\end{aligned}$$

reprezentând variația vitezei unghiulare a Pământului în timpul considerat, Δt ;

$$\Delta \omega_{\text{p}} = -6 \cdot 10^{-22} \text{ s}^{-2} \cdot 6 \cdot 10^8 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 3600 \text{ s} \approx -1,14 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1};$$

$$\Delta \omega_{\text{p}} = \omega_{\text{p,prezent}} - \omega_{\text{p,trecut}};$$

$$\omega_{p,prezent} = \frac{2\pi}{T_{p,prezent}} = \frac{2\pi}{1 \text{ zi siderala prezent}} = \frac{2\pi}{86.164 \text{ s}} \approx 7,29 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1};$$

$$\omega_{p,prezent} - \omega_{p,trecut} = -1,14 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1};$$

$$\omega_{p,trecut} = \omega_{p,prezent} - \Delta\omega_p;$$

$$\omega_{p,trecut} = 7,29 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1} + 1,14 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1} = 8,43 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1};$$

$$\omega_{p,trecut} = \frac{2\pi}{T_{p,trecut}} = \frac{2\pi}{1 \text{ zi siderala trecut}};$$

$$1 \text{ zi siderala trecut} = \frac{2\pi}{\omega_{p,trecut}} = \frac{2\pi}{8,43 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}} \approx 74.000 \text{ s};$$

$$1 \text{ an sideral} = 365,26 \text{ zile siderale};$$

$$N_{\text{zile intr-un an trecut}} = \frac{\text{durata 1 an sideral}}{1 \text{ zi siderala trecut}};$$

$$N_{\text{zile intr-un an trecut}} = \frac{365,26 \text{ zile}}{74.000 \text{ s}} = \frac{365,26 \cdot 86164 \text{ s}}{74000 \text{ s}} \approx 425,3 \text{ zile}.$$

5.7. Explozie în interiorul unui satelit. Un satelit evoluează în jurul Pământului pe o orbită circulară, astfel încât impulsul inițial al satelitului este $\vec{p}_0$. La un anumit moment, o explozie produsă în interiorul satelitului, îi dă satelitului un impuls suplimentar $\Delta\vec{p}$, pentru care $\Delta p = p_0$.

Să se analizeze posibilele orientări ale vectorului $\Delta\vec{p}$, astfel încât, după explozie, noua orbită a satelitului să fie:

- o hiperbolă, cu perigeul în punctul unde s-a produs explozia;
- o parabolă, cu perigeul în punctul unde s-a produs explozia;
- o elipsă, cu perigeul în punctul unde s-a produs explozia;
- un cerc;
- o elipsă, cu apogeul în punctul unde s-a produs explozia.

Notații, corespunzătoare desenului din figura 5.3: α – unghiul dintre vectorii $\vec{p}_0$ și $\Delta\vec{p}$; β – unghiul dintre vectorii $\vec{r}$ (raza vectoare a satelitului) și $\Delta\vec{p}$.

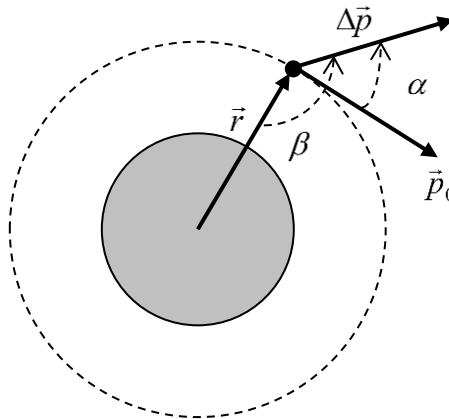


Fig. 5.3

Rezolvare

5.7. Admițând că forma orbitei satelitului, după explozia din interiorul său, este un cerc, o elipsă, o parabolă sau o hiperbolă, centrul Pământului se va afla, fie în centrul cercului, fie în unul din focarele elipsei, fie în focarul parabolei, fie în focarul hiperbolei.

Pentru $\alpha = 180^\circ$ și $\beta = 270^\circ$, așa cum indică figura 5.4, noua orbită a satelitului va fi o dreaptă, de-a lungul căreia satelitul va cădea liber spre centrul Pământului.

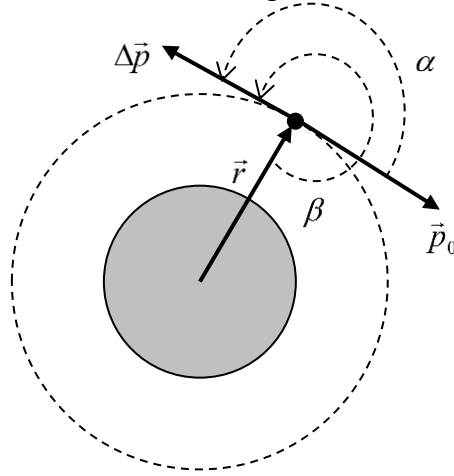


Fig. 5.4

Punctul în care s-a produs explozia va fi perigeul (sau apogeul) orbitei de transfer, numai dacă, în acest punct, vectorii $\vec{p} = m \vec{v} = \vec{p}_0 + \Delta\vec{p}$ (impulsul satelitului după explozie) și $\vec{r}$ (vectorul de poziție al satelitului în punctul unde s-a produs explozia) vor fi perpendiculari, ceea ce implică tangența orbitei circulare dinaintea exploziei cu orbita pe care se va face transferul (hiperbolă, parabolă, elipsă, cerc).

Limitându-ne numai la posibilitatea transferului satelitului, ca urmare a exploziei din interiorul său, pe orbite cu perigeul sau apogeul în punctul unde s-a produs explozia, atunci, un astfel de transfer se poate realiza numai dacă unghiul β , dintre vectorii $\vec{r}$ și $\Delta\vec{p}$, are valorile: $\beta = 90^\circ$ sau $\beta = 270^\circ$.

Valorile lui α , pentru variantele propuse, trebuie să fie cele prezentate în continuare.

a) *Această variantă presupune studiul posibilității transferului satelitului, ca urmare a exploziei din interiorul său, de pe orbita circulară inițială, pe o orbită hiperbolică, având perigeul în punctul unde s-a produs explozia.*

În general, evoluția pe o orbită hiperbolică implică o energie mecanică totală a sistemului satelit – Pământ, $E > 0$, astfel încât, imediat după explozie, în punctul unde s-a produs explozia, energia totală a sistemului este:

$$E = \frac{m v^2}{2} - K \frac{mM}{r},$$

unde v este viteza satelitului imediat după explozie. Dacă $\vec{p}$ este impulsul satelitului imediat după explozie, rezultă:

$$\vec{p} = m \vec{v} = \vec{p}_0 + \Delta\vec{p};$$

$$v = \frac{1}{m} \sqrt{p_0^2 + (\Delta p)^2 + 2p_0(\Delta p)\cos\alpha}; \Delta p = p_0 = m v_0;$$

$$v = v_0 \sqrt{2(1 + \cos\alpha)},$$

unde v_0 este viteza satelitului pe orbita circulară, înainte de explozie;

$$v_0 = \sqrt{K \frac{M}{r}}; v_0^2 = K \frac{M}{r};$$

$$E = m v_0^2 (1 + \cos\alpha) - m v_0^2 = m v_0^2 \cos\alpha.$$

Condiția $E > 0$ este îndeplinită dacă unghiul α are valori care aparțin intervalelor:

$$0 \leq \alpha < 90^\circ; \alpha \in [0; 90^\circ);$$

$$270^\circ < \alpha \leq 360^\circ; \alpha \in (270^\circ; 360^\circ].$$

Pentru variantele $\alpha = 0$ și $\alpha = 360^\circ$, rezultă:

$$v = 2 v_0; E = K \frac{mM}{r} = m v_0^2 > 0,$$

astfel încât, după explozie, satelitul va evolua pe o orbită hiperbolică, având Pământul în focarul său, iar punctul unde s-a produs explozia este chiar perigeul orbitei, așa cum indică figura 5.5.

Concluzie: pentru ca, după explozie, satelitul să evolueze pe o orbită hiperbolică, având perigeul în punctul unde s-a produs explozia, trebuie ca $\alpha = 0^\circ$ sau $\alpha = 360^\circ$ și $\beta = 90^\circ$.

Variantele $\alpha = 90^\circ$ și respectiv $\alpha = 270^\circ$ se exclud, deoarece, pentru ele $v = v_0 \sqrt{2}$, ceea ce implică $E = 0$.

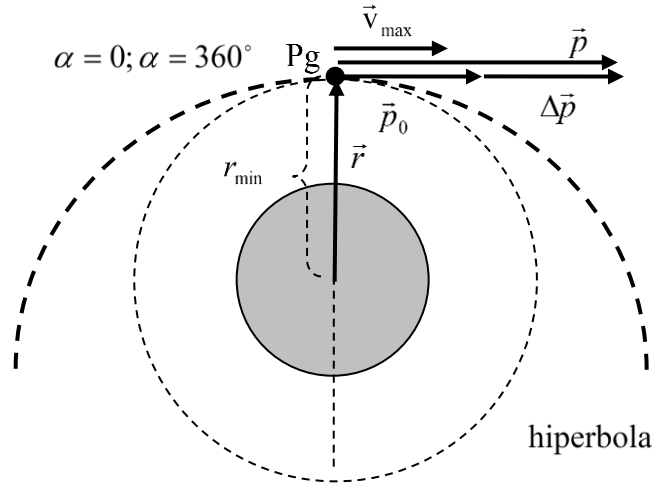


Fig. 5.5

Pentru toate celelalte valori ale lui α , cuprinse în intervalele precizate, v are astfel de valori, încât $E > 0$, ceea ce implică evoluții pe orbite hiperbolice, ale căror perigee nu mai coincid cu punctul unde a avut loc explozia. Dacă $0 < \alpha < 90^\circ$, așa cum indică figura 5.6, punctul unde s-a produs explozia se află după perigeul orbitei, astfel încât, după explozie satelitul se depărtează de perigeu pe un arc de hiperbolă.

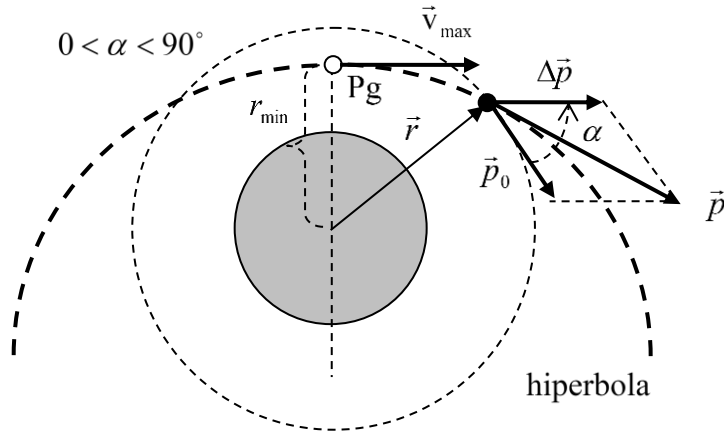


Fig. 5.6

Pentru o valoare oarecare a lui α , îndeplinind condiția $0 < \alpha < 90^\circ$, scriind legile de conservare ale energiei și a momentului cinetic, pentru punctul unde a avut loc explozia și pentru punctul care reprezintă apogeul pe noua orbită hiperbolică (altul decât punctul unde a avut loc explozia), rezultă:

$$E = \frac{m v_{\max}^2}{2} - K \frac{mM}{r_{\min}} = \frac{m v_{\max}^2}{2} - mK \frac{M}{r} \frac{r}{r_{\min}} = \frac{m v_{\max}^2}{2} - m v_0^2 \frac{r}{r_{\min}};$$

$$E = m v_0^2 \cos \alpha;$$

$$\frac{m v_{\max}^2}{2} - m v_0^2 \frac{r}{r_{\min}} = m v_0^2 \cos \alpha;$$

$$\frac{v_{\max}^2}{2} - v_0^2 \frac{r}{r_{\min}} = v_0^2 \cos \alpha;$$

$$m v_{\max} r_{\min} = (p_0 + \Delta p \cdot \cos \alpha) \cdot r;$$

$$m v_{\max} r_{\min} = p_0 (1 + \cos \alpha) \cdot r;$$

$$m v_{\max} r_{\min} = m v_0 (1 + \cos \alpha) \cdot r;$$

$$v_{\max} r_{\min} = v_0 (1 + \cos \alpha) \cdot r;$$

$$v_{\max} = v_0 (1 + \cos \alpha) \cdot \frac{r}{r_{\min}};$$

$$\frac{v_{\max}^2}{2} - v_0^2 \frac{r}{r_{\min}} = v_0^2 \cos \alpha;$$

$$\frac{1}{2} v_0^2 (1 + \cos \alpha)^2 \cdot \left(\frac{r}{r_{\min}} \right)^2 - v_0^2 \frac{r}{r_{\min}} = v_0^2 \cos \alpha;$$

$$\frac{1}{2} (1 + \cos \alpha)^2 \cdot \left(\frac{r}{r_{\min}} \right)^2 - \frac{r}{r_{\min}} = \cos \alpha;$$

$$(1 + \cos \alpha)^2 \cdot \left(\frac{r}{r_{\min}} \right)^2 - 2 \frac{r}{r_{\min}} - 2 \cos \alpha = 0;$$

$$\frac{r}{r_{\min}} = \frac{1 + \sqrt{1 + 2 \cos \alpha \cdot (1 + \cos \alpha)^2}}{(1 + \cos \alpha)^2};$$

$$r_{\min} = r \frac{(1 + \cos \alpha)^2}{1 + \sqrt{1 + 2 \cos \alpha \cdot (1 + \cos \alpha)^2}} < r.$$

Dacă $270^\circ < \alpha < 360^\circ$, așa cum indică figura 5.7, punctul unde s-a produs explozia se află înaintea perigeului orbitei, astfel încât, după explozie satelitul se apropie de perigeu pe un arc de hiperbolă.

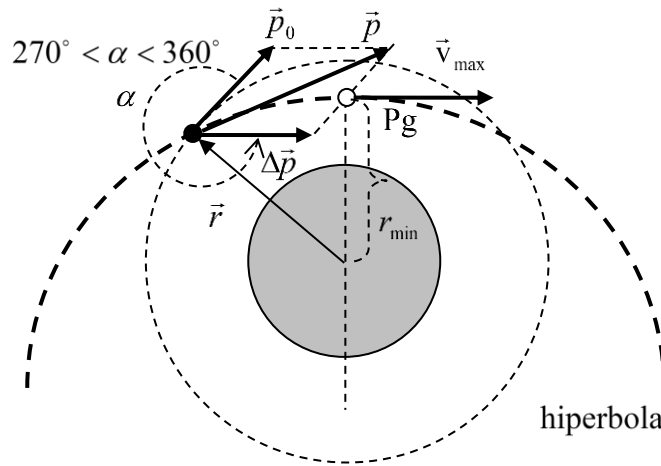


Fig. 5.7

b) Această variantă presupune studiul posibilității transferului satelitului, ca urmare a exploziei din interiorul său, de pe orbita circulară inițială, pe o orbită parabolică, având perigeul în punctul unde s-a produs explozia.

În general, evoluția pe o orbită parabolică implică o energie mecanică totală a sistemului satelit – Pământ, $E = 0$, astfel încât, imediat după explozie, energia sistemului este:

$$E = \frac{m v^2}{2} - K \frac{mM}{r} = m v_0^2 \cos \alpha,$$

unde v este viteza satelitului imediat după explozie. Dacă $\vec{p}$ este impulsul satelitului imediat după explozie, rezultă:

$$\vec{p} = m \vec{v} = \vec{p}_0 + \Delta \vec{p};$$

$$v = \frac{1}{m} \sqrt{p_0^2 + (\Delta p)^2 + 2 p_0 (\Delta p) \cos \alpha}; \Delta p = p_0 = m v_0;$$

$$v = v_0 \sqrt{2(1 + \cos \alpha)},$$

unde v_0 este viteza satelitului pe orbita circulară, înainte de explozie;

$$v_0 = \sqrt{K \frac{M}{r}}.$$

Condiția $E = 0$ este îndeplinită dacă, în expresia lui v , unghiul α are valorile:

$$\alpha = 90^\circ; \alpha = 270^\circ,$$

deoarece, pentru ele $v = v_0 \sqrt{2}$, ceea ce implică $E = 0$, astfel încât, după explozie, satelitul va evolua pe o orbită parabolică, având Pământul în focarul său, dar punctul unde s-a produs explozia nu este perigeul orbitei.

Într-adevăr, folosind rezultatul anterior:

$$r_{\min} = r \frac{(1 + \cos \alpha)^2}{1 + \sqrt{1 + 2 \cos \alpha \cdot (1 + \cos \alpha)^2}},$$

particularizat pentru $\alpha = 90^\circ$, rezultă $r_{\min} = r/2 < r$, reprezentând distanța de la centrul Pământului până la perigeul orbitei parabolice a satelitului, așa cum indică figura 5.8. Punctul unde s-a produs explozia se află după perigeul orbitei, astfel încât, după explozie satelitul se depărtează de perigeu pe un arc de parabolă.

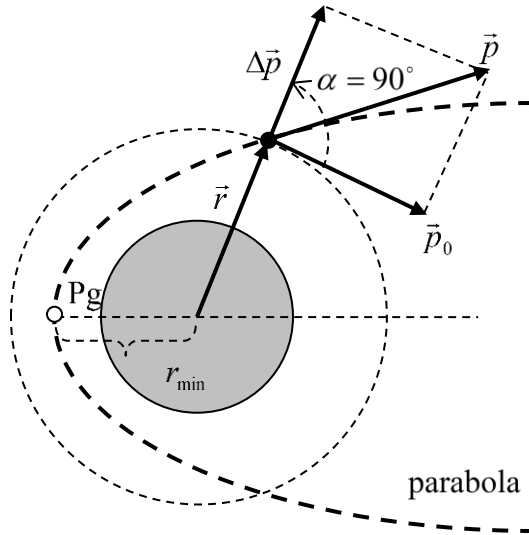


Fig. 5.8

Concluzie: după explozie, orbita satelitului va fi un arc dintr-o parabolă, în al cărei perigeu nu se află punctul în care s-a produs explozia.

În mod asemănător, pentru $\alpha = 270^\circ$, așa cum indică desenul din figura 5.9, traiectoria satelitului, după explozia din interiorul său, este un arc de parabolă. Punctul unde s-a produs explozia se află înaintea perigeului orbitei, astfel încât, după explozie satelitul se apropie de perigeu pe un arc de parabolă.

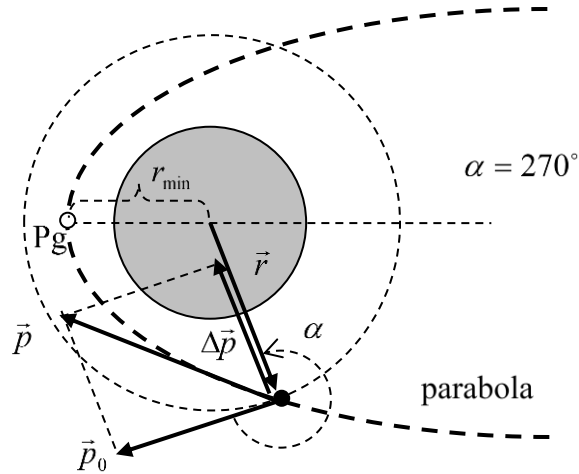


Fig. 5.9

c) Această variantă presupune studiul posibilității transferului satelitului, ca urmare a exploziei din interiorul său, de pe orbita circulară inițială, pe o orbită eliptică, având perigeul în punctul unde s-a produs explozia.

În general, evoluția pe o orbită eliptică implică o energie mecanică totală a sistemului satelit – Pământ, $E < 0$, astfel încât, imediat după explozie, energia sistemului este:

$$E = \frac{m v^2}{2} - K \frac{mM}{r} = m v_0^2 \cos \alpha,$$

unde v este viteza satelitului imediat după explozie;

$$v = v_0 \sqrt{2(1 + \cos \alpha)},$$

unde v_0 este viteza satelitului pe orbita circulară, înainte de explozie;

$$v_0 = \sqrt{K \frac{M}{r}}.$$

Condiția $E < 0$ este îndeplinită dacă unghiul α are valori care aparțin intervalului:

$$90^\circ < \alpha < 120^\circ; \quad \alpha \in (90^\circ; 120^\circ),$$

evidențiind că orbita satelitului, după explozie, este o elipsă, așa cum indică figura 5.10. Punctul unde s-a produs explozia se află după perigeul orbitei, astfel încât, după explozie satelitul se depărtează de perigeu pe un arc de elipsă.

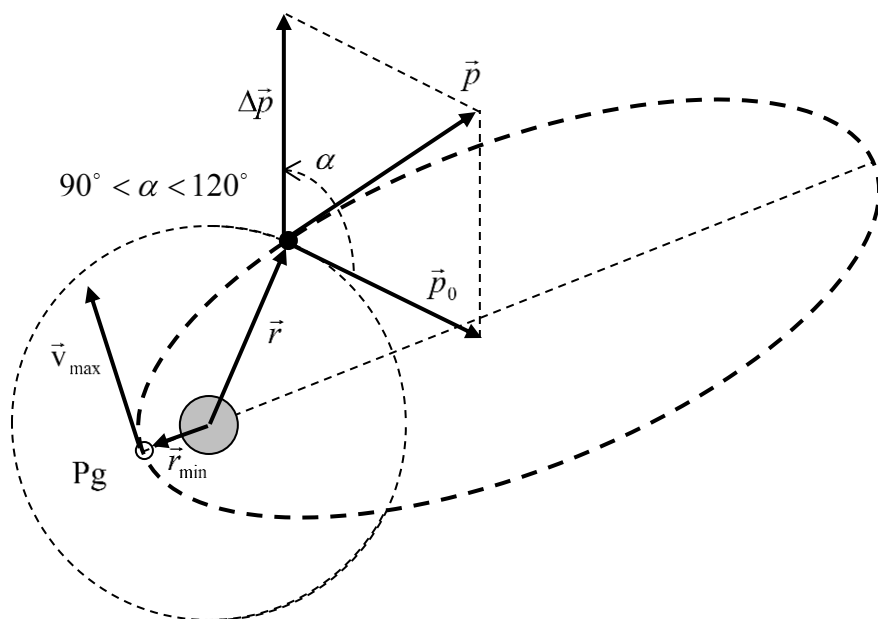


Fig. 5.10

Condiția $E < 0$ este îndeplinită și dacă unghiul α are valori care aparțin intervalului:

$$240^\circ < \alpha < 270^\circ; \alpha \in (240^\circ; 270^\circ),$$

evidențiind că orbita satelitelui, după explozie, este tot o elipsă, așa cum indică figura 5.11. Punctul unde s-a produs explozia se află înaintea perigeului orbitei, astfel încât, după explozie satelitul se apropie de perigeu pe un arc de elipsă.

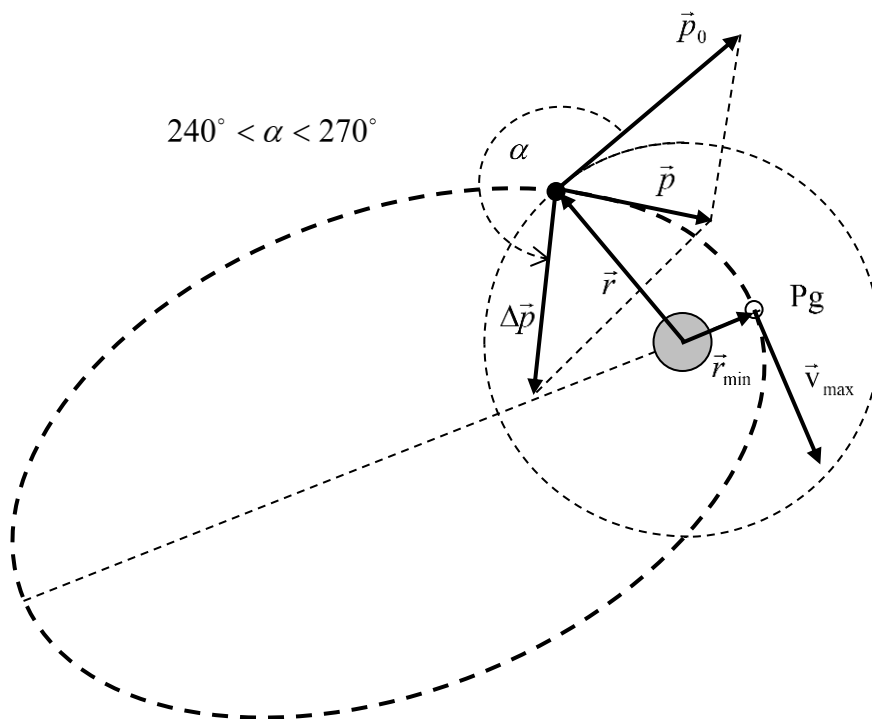


Fig. 5.11

Singurele valori ale lui α , care n-au fost luate în considerare, sunt: $\alpha = 120^\circ$; $\alpha = 240^\circ$.
Lor le corespund valorile:

$$v = v_0 = \sqrt{K \frac{M}{r}}; \quad r_{\min} = \frac{r}{2(2 + \sqrt{3})} < r;$$

$$E = \frac{m v^2}{2} - K \frac{mM}{r} = \frac{m v_0^2}{2} - m v_0^2 = -\frac{m v_0^2}{2} < 0,$$

e) Această variantă presupune studiul posibilității transferului satelitului, ca urmare a exploziei din interiorul său, de pe orbita circulară inițială, pe o orbită eliptică, având perigeul în punctul unde s-a produs explozia.

$$120^{\circ} < \alpha < 180^{\circ}; \alpha \in (120^{\circ}; 180^{\circ}),$$

evidențiind că orbita satelitului, după explozie, este o elipsă, așa cum indică figura 5.12. Punctul unde s-a produs explozia se află după perigeul orbitei, astfel încât, după explozie satelitul se depărtează de perigeu pe un arc de elipsă.

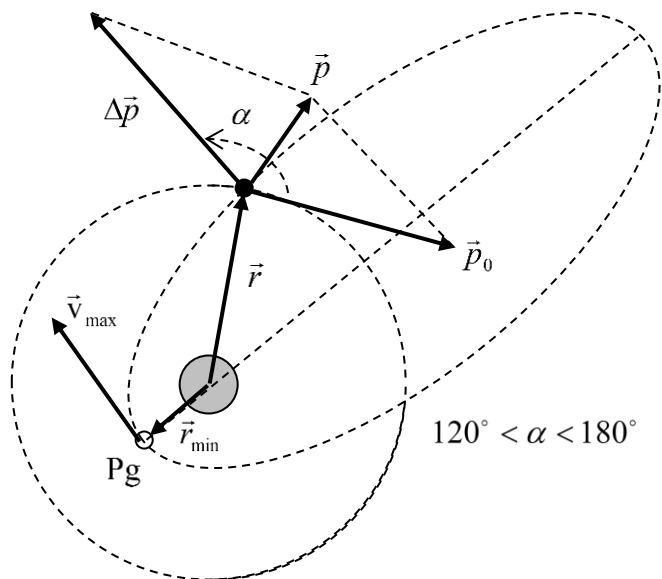


Fig. 5.12

$$180^\circ < \alpha < 240^\circ; \alpha \in (180^\circ; 240^\circ),$$

evidențiind că orbita satelitului, după explozie, este tot o elipsă, așa cum indică figura 5.13. Punctul unde s-a produs explozia se află înaintea perigeului orbitei, astfel încât, după explozie satelitul se apropie de perigeu pe un arc de elipsă.

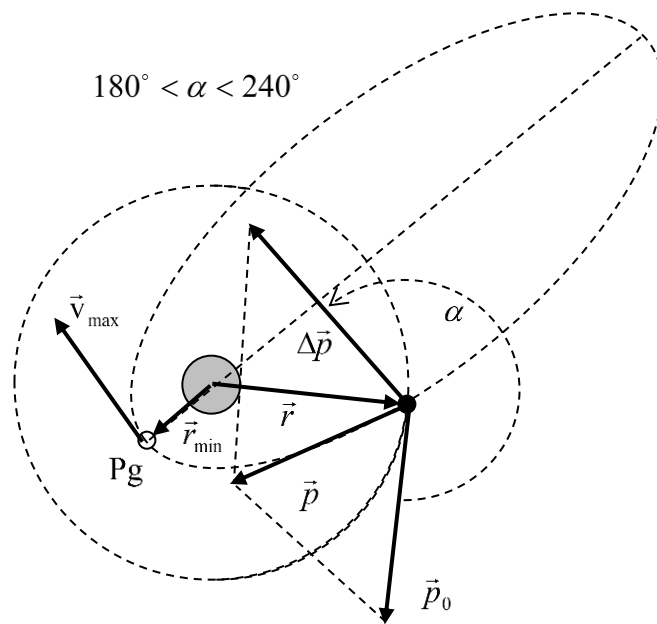


Fig. 5.13

$$N_{\text{I,total}} \approx [25,56] \frac{\text{fotoni}}{\text{s}} = 25 \frac{\text{fotoni}}{\text{s}}.$$